МАССОВАЯ РАДИО БИБЛИОТЕКА

Я. С. КУБЛАНОВСКИЙ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ



МАССОВАЯ
РАДИОБИБЛИОТЕКА

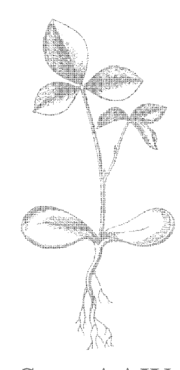
Выпуск 869

Я. С. КУБЛАНОВСКИЙ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ



«ЭНЕРГИЯ»
МОСКВА 1971



6Ф2
К 88
УДК 621.396.029.1

Кублановский Я. С.

К 88 Переходные процессы. М., «Энергия», 1974.

88 с. с ил. (Массовая радиобиблиотека. Вып. 869).

Рассмотрены причины возникновения и характер переходных процессов в электрических цепях. Даны понятия о некоторых основных методах анализа переходных процессов. Приведены примеры расчета переходных режимов различных электрических цепей.

Книга предназначена для подготовленных радиолюбителей.

К $\frac{30401-556}{051(01)-74}$ 288-74 6Ф2

ЯКОВ СОЛОМОНОВИЧ КУБЛАНОВСКИЙ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Редактор *Л. Н. Бочаров*
Редактор издательства *Г. Н. Астафуров*
Обложка художника *А. А. Иванова*
Художественный редактор *Д. И. Чернышев*
Технический редактор *Л. Н. Никитина*
Корректор *З. Б. Драновская*

Сдано в набор 24/V 1974 г.
Подписано к печати 10/X 1974 г. Т-16675
Формат 84×108[1]/[32] Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 4,62 Уч.-изд. л. 5,75
Тираж 30 000 экз. Зак. 812 Цена 26 коп.

Издательство «Энергия», Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Набрано в Московской типографии № 10 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.
Отпечатано в Чеховском полиграфическом комбинате Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области. Зак. 2296

ПРЕДИСЛОВИЕ

В электротехнике, радиоэлектронике и автоматике переходные процессы играют весьма важную роль. Качество работы ряда импульсных устройств в большой степени зависит от правильного анализа и расчета переходных режимов. В то же время с работой электрических цепей в переходном режиме многие радиолюбители или совсем незнакомы, или же знакомы в недостаточной мере.

Переходные режимы не являются чем-то необычным и характерны не только для электрических цепей. Можно привести ряд примеров из разных областей физики и техники, где случаются такого рода явления. Например, налитая в сосуд горячая вода постепенно охлаждается и ее температура изменяется от начального значения до установившегося, равного температуре окружающей среды. Выведенный из состояния покоя маятник совершает затухающие колебания и, в конце концов, возвращается в исходное стационарное неподвижное состояние. При подключении электроизмерительного прибора его стрелка перед остановкой на соответствующем делении шкалы совершает вокруг этой точки шкалы несколько колебаний. Подобные примеры можно было бы продолжить.

В предлагаемой книге сделана попытка познакомить читателей с переходными процессами в линейных электрических цепях. Рассмотрены причины возникновения и характер протекания переходных процессов, причем основное внимание уделяется физическим представлениям о происходящих явлениях. Рассмотрены и проиллюстрированы многочисленными примерами «классический» и операторный методы анализа переходных процессов в различных электрических цепях.

(Автор)

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Линейные электрические цепи

Электрической цепью называется совокупность элементов, образующих пути для прохождения электрического тока. Электрическая цепь состоит из активных и пассивных элементов. Активными элементами считаются источники электрической энергии (источники напряжения и тока), к пассивным элементам относятся резисторы, катушки индуктивности, электрические конденсаторы. Количественные характеристики элементов электрической цепи называются ее параметрами. Например, параметрами источника постоянного напряжения являются его э. д. с. и внутреннее сопротивление. Параметром резистора служит его сопротивление R, катушки — ее индуктивность L и конденсатора — емкость C.

Напряжение или ток, подводимые к цепи, будем называть воздействующим или входным сигналом. Воздействующие сигналы можно рассматривать как различные функции времени, изменяющиеся по некоторому закону $z(t)$. Например, $z(t)$ может быть постоянной величиной, изменяться во времени по периодическому закону или иметь апериодический характер. Напряжения и токи, возникающие под влиянием внешнего воздействия в интересующей нас части электрической цепи и также являющиеся функциями времени $x(t)$, будем называть реакцией (откликом) цепи или выходным сигналом.

Любой пассивный элемент реальной электрической цепи в той или иной степени обладает активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Однако, чтобы облегчить изучение процессов в электрической цепи и ее расчет, реальная цепь заменяется идеализированной, состоящей из отдельных пространственно разделенных элементов R, L, C. При этом считается, что проводники, соединяющие элементы цепи, не обладают активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Такая идеализированная цепь называется цепью с сосредоточенными параметрами, и основанные на ней расчеты дают во многих случаях хорошо подтверждаемые опытом результаты.

В настоящей книге рассматриваются электрические цепи с постоянными параметрами, т. е. такие цепи, в которых сопротивления резисторов R, индуктивность катушек L и емкость конденсаторов C являются постоянными, не зависящими от действующих в цепи токов и напряжений. Такие элементы называются линейными.

Если сопротивление резистора R не зависит от тока, то линейная зависимость между падением напряжения и током выражается законом Ома $u_R = Ri_R$, а вольт-амперная характеристика резистора представляет собой прямую линию (рис. 1,*а*). Если индуктивность катушки L не зависит от величины протекающего в ней тока, то потокосцепление самоиндукции катушки Ψ прямо пропорционально этому току $\Psi = Li_L$ (рис. 1,*б*). Наконец, если емкость конденсатора C не зависит от приложенного к обкладкам напряжения u_C, то заряд q, накопленный на пластинах, и напряжение u_C связаны между собой линейной зависимостью $q = Cu_C$, графически показанной на рис. 1,*в*.

Линейность сопротивления, индуктивности и емкости носит условный характер, так как в действительности все реальные элементы электрической цепи являются нелинейными. Так, при прохождении

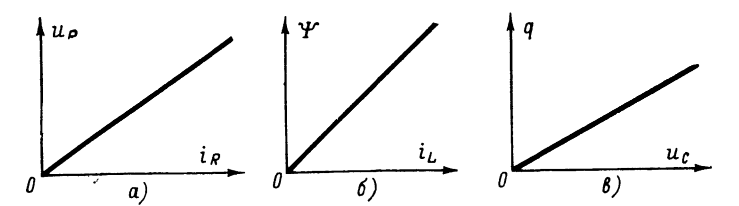


Рис 1. Характеристики линейных элементов электрической цепи.

а — вольт-амперная характеристика резистора; *б* — зависимость потокосцепления от тока в катушке; *в* — зависимость заряда конденсатора от напряжения на нем.

тока через резистор последний нагревается и его сопротивление изменяется. Чрезмерное увеличение тока в катушке с ферромагнитным сердечником может несколько изменить ее индуктивность. В той или иной степени изменяется емкость конденсаторов с различными диэлектриками в зависимости от приложенного напряжения. Однако в нормальном рабочем режиме элементов эти изменения обычно столь незначительны, что при расчетах могут не приниматься во внимание.

Электронные лампы и транзисторы, работающие в режимах, когда используются прямолинейные участки их вольт-амперных характеристик, также условно могут рассматриваться как линейные устройства.

В табл. 1 приведены соотношения между мгновенными значениями напряжения и тока для элементов R, L, C, причем функции времени напряжение $u(t)$ и ток $i(t)$ для сокращения записи обозначаются без указания аргумента t, т. е. $u(t) = u$, а $i(t) = i$. Такая же форма записи часто используется и в последующем изложении.

Символом $i_L(0)$ обозначен начальный ток, протекающий в катушке, а $u_C(0)$ — начальное напряжение на конденсаторе, соответствующие моменту времени $t = 0$.

Падение напряжения на индуктивности зависит от скорости изменения тока di_L/dt; показанные в табл. 1 полярность напряжения u_L и направление тока i_L соответствуют возрастанию тока, протекающего через катушку (производная di_L/dt положительна).

Ток i_C, проходящий через конденсатор, определяется скоростью изменения выделяющегося на нем напряжения du_C/dt. Обозначенные стрелкой направление тока i_C и полярность напряжения u_C соответствуют возрастанию напряжения на конденсаторе, т. е. его заряду в указанном направлении (производная du_C/dt положительна). Если i_L и u_C уменьшаются (производные отрицательные), то полярность напряжения u_L и направление тока i_C должны быть изменены на обратные.

Электрическая цепь, состоящая из линейных элементов, называется линейной электрической цепью. Процессы в таких цепях описываются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

Важным свойством линейных цепей, вытекающим из линейности уравнений, описывающих процессы в них, является то, что такие цепи подчиняются принципу наложения (суперпозиции), суть которого может быть сформулирована так. При одновременном

Таблица 1

Элемент цепи	Падение напряжения	Ток
R (+ u_R −, i_R →)	$u_R = Ri_R$	$i_R = \frac{u_R}{R}$
L (+ u_L −, i_L →)	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t u_L\,dt + i_L(0)$
C (+ u_C −, i_C →)	$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C\,dt + u_C(0)$	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$

действии на электрическую цепь нескольких входных сигналов напряжение или ток в какой-либо части цепи можно определить путем наложения, т. е. алгебраического сложения решений, найденных для каждого из входных сигналов в отдельности. Так, например, если входным сигналам $z_1(t)$ и $z_2(t)$, порознь подводимым к цепи, соответствуют выходные сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то суммарному входному сигналу $z_1(t)+z_2(t)$ будет соответствовать выходной сигнал $x_1(t)+x_2(t)$.

Принцип суперпозиции называют также принципом независимости действия, так как он основан на том, что каждое слагаемое

сложного воздействия вызывает свою реакцию независимо от того, действуют ли в цепи другие слагаемые или нет.

Для анализа переходных процессов в линейных электрических цепях используются законы Кирхгофа. Полезно напомнить эти законы.

Первый закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов узла равна нулю.*

Второй закон Кирхгофа: *сумма напряжений на отдельных элементах замкнутого контура электрической цепи равна сумме внешних э. д. с., действующих в этом контуре.*

Электрические цепи, составленные из резисторов и катушек индуктивности, в дальнейшем сокращенно называются цепями RL, цепи, содержащие резисторы и конденсаторы, — цепями RC и, наконец, цепи, состоящие из резисторов, катушек и конденсаторов, — цепями RLC.

В последующих главах рассматриваются только линейные цепи с сосредоточенными параметрами.

Установившийся и переходный режим электрической цепи

При анализе процессов в электрических цепях приходится встречаться с двумя режимами работы: установившимся (стационарным) и переходным.

Установившимся режимом электрической цепи, подключенной к источнику постоянного напряжения (тока), называется режим, при котором токи и напряжения в отдельных ветвях цепи неизменны во времени.

В цепи, подключенной к источнику переменного тока, установившийся режим характеризуется периодическим повторением мгновенных значений токов и напряжений в ветвях. Так, например, если цепь подключена к источнику э. д. с. синусоидальной формы, частоты ω, то ток (напряжение) в любой ветви имеет синусоидальную форму, постоянную амплитуду и изменяется с частотой ω. Именно для такого режима мы вправе говорить, что индуктивное сопротивление катушки переменному току равно ωL, а емкостное сопротивление конденсатора равно $1/\omega C$.

Во всех случаях работы цепей в установившихся режимах, которые теоретически могут продолжаться неограниченно долгое время, предполагается, что параметры воздействующего сигнала (напряжения или тока), а также структура цепи и параметры ее элементов не изменяются. Токи и напряжения установившегося режима зависят от вида внешнего воздействия и от параметров электрической цепи.

Принято также считать, что в установившемся режиме находится электрическая цепь, отключенная от источника электрической энергии, т. е. цепь, в ветвях которой нет токов.

Переходным режимом (или переходным процессом) называется режим, возникающий в электрической цепи при переходе от одного стационарного состояния к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего, а сопутствующие этому режиму напряжения и токи — переходными напряжениями и токами. Изменение стационарного режима цепи может происходить в результате изменения внешних сигналов, в том числе включения или отключения источника внеш-

него воздействия, или может быть вызвано переключениями внутри самой цепи.

Любое изменение в электрической цепи, приводящее к возникновению переходного процесса, условимся называть **коммутацией**. В большинстве случаев теоретически допустимо считать, что длительность коммутации по сравнению с продолжительностью переходного процесса очень мала. В этих случаях можно полагать, что коммутация осуществляется мгновенно, т. е. различные переключения в цепи происходят без затраты времени, и продолжительность коммутации Δt считать равной нулю $\Delta t=0$. Процесс коммутации на схемах условно показывается стрелкой возле выключателя B (рис. 2).

Рис. 2. Условное изображение процесса коммутации.

а — замыкание; *б* — размыкание цепи.

Переходные процессы в реальных цепях являются быстропротекающими, продолжительность их составляет десятые, сотые, а часто и миллионные доли секунды. Сравнительно редко длительность этих процессов достигает единицы секунды.

Естественно возникает вопрос, надо ли вообще принимать во внимание переходные режимы, имеющие столь короткую длительность. Ответ может быть дан только для каждого конкретного случая, так как в различных условиях роль их неодинакова. Особенно велико их значение в устройствах, предназначенных для усиления, формирования и преобразования импульсных сигналов, когда длительность воздействующих на электрическую цепь сигналов соизмерима с продолжительностью переходных режимов. Переходные процессы являются причиной искажения формы импульсов при прохождении их через линейные цепи.

Расчет и анализ устройств автоматики, где происходит непрерывная смена состояния электрических цепей, немыслим без учета переходных режимов.

В ряде устройств возникновение переходных процессов, в принципе, нежелательно и опасно. Расчет переходных режимов в этих случаях позволяет определить возможные перенапряжения и увеличения токов, которые во много раз могут превышать напряжения и токи стационарного режима. Это особенно важно для цепей со значительной индуктивностью или большой емкостью.

В некоторых случаях, например при ручном телеграфировании, где длительность телеграфных сигналов равна десятым долям секунды, переходные процессы в электрических цепях, протекающие в течение миллионных долей секунды, практически не влияют на передаваемые сигналы.

Причины возникновения переходного процесса и законы коммутации

Рассмотрим с качественной точки зрения явления, возникающие в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима к другому. Обратимся к известным опытам и рассмотрим, как устанавливается стационарный режим электрических цепей, схемы которых показаны на рис. 3.

Включим лампу накаливания в последовательную цепь, содержащую резистор R_1, выключатель B и источник постоянного напря-

жения E (рис. 3,*а*). После замыкания выключателя лампа сразу же загорится, так как разогрев нити и нарастание яркости ее свечения на глаз оказываются незаметными. Можно условно считать, что в такой цепи ток стационарного режима, равный $I_0=E/(R_1+R_л)$, устанавливается практически мгновенно, где $R_л$ — активное сопротивление накаленной нити лампы.

Заменим резистор катушкой L, индуктивность которой достаточно велика. После замыкания выключателя можно заметить, что нарастание яркости свечения лампы происходит постепенно. Это свидетельствует о том, что из-за наличия катушки ток в цепи постепенно достигает своего установившегося значения $I'_0=E/(r_к+R_л)$, где $r_к$ — активное сопротивление обмотки катушки (рис. 3,*б*).

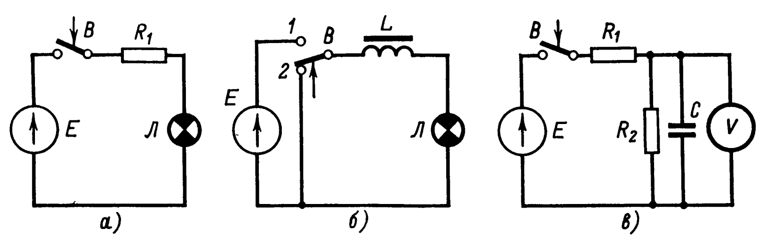


Рис. 3. Схемы цепей для иллюстрации переходных процессов.
а — цепь без реактивных элементов; *б* — цепь с катушкой индуктивности; *в* — цепь с конденсатором.

Следующий эксперимент проведем с цепью, состоящей из источника постоянного напряжения, резисторов и конденсатора, параллельно которому подключим вольтметр (рис. 3,*в*). Если емкость конденсатора достаточно велика (несколько десятков микрофарад), а сопротивление каждого из резисторов R_1 и R_2 несколько сотен килоом, то после замыкания выключателя стрелка вольтметра начинает плавно отклоняться и только через несколько секунд устанавливается на соответствующем делении шкалы. Следовательно, напряжение на конденсаторе, а также и ток в цепи устанавливаются в течение относительно продолжительного промежутка времени (инерционностью самого измерительного прибора в данном случае можно пренебречь).

Что же препятствует мгновенному установлению стационарного режима в цепях рис. 3,*б, в* и служит причиной возникновения переходного процесса? Причиной этому являются элементы электрических цепей, способные запасать энергию (так называемые реактивные элементы): катушка индуктивности (рис. 3,*б*) и конденсатор (рис. 3,*в*).

Возникновение переходных процессов связано с особенностями изменения запасов энергии в реактивных элементах цепи. Количество энергии, накапливаемой в магнитном поле катушки с индуктивностью L, в которой протекает ток i_L, выражается формулой

$$W_L=\frac{1}{2}Li_L^2.$$

Энергия, накапливаемая в электрическом поле конденсатора емкостью C, заряженного до напряжения u_C, равна:

$$W_C = \frac{1}{2} C u_C^2 .$$

Количество энергии W_L, как и энергии W_C, не может измениться во времени скачком. Справедливость этого положения легко доказать следующим рассуждением. Допустим, например, что в цепи рис. 3,*б* за время коммутации, которая, как мы условились считать, происходит мгновенно, т. е. $\Delta t=0$, энергия магнитного поля катушки возросла от нуля на некоторую конечную величину ΔW_L. Мощность источника P_0 (в данном случае источника постоянного напряжения), отдающего эту энергию, можно найти, разделив приращение энергии на интервал времени, в течение которого это приращение произошло, т. е.

$$P_0 = \frac{\Delta W_L}{\Delta t}.$$

Поскольку продолжительность коммутации принята равной нулю ($\Delta t=0$), то отношение $\Delta W_L/\Delta t$ обращается в бесконечность и, следовательно, мощность P_0 получается бесконечно большой. Однако все реально существующие источники энергии не могут отдавать бесконечно большую мощность и полученный результат, естественно, не имеет смысла. Таким образом, увеличение запаса энергии магнитного поля катушки (равно как и уменьшение) может происходить только за конечное время, следовательно, предположение о возможности скачкообразного изменения величины W_L противоречит энергетическим соотношениям и физически нереально.

Путем аналогичных рассуждений нетрудно прийти к выводу, что любое изменение запаса энергии W_C в электрическом поле конденсатора также не может происходить скачком.

Из этого вытекают два важных правила. Поскольку запас магнитной энергии W_L определяется током в катушке i_L, а электрической энергии W_C — напряжением на конденсаторе u_C, то во всех электрических цепях при любых коммутациях соблюдаются два основных положения: *ток катушки и напряжение на конденсаторе не могут изменяться скачком.* Иногда эти положения формулируются иначе, а именно: потокосцепление катушки и заряд конденсатора могут изменяться только плавно, без скачков.

Физически переходные режимы представляют собой процессы перехода энергетического состояния цепи от докоммутационного к послекоммутационному режиму. Каждому стационарному состоянию цепи, имеющей реактивные элементы, соответствует определенный запас энергии электрического и магнитного полей. Переход к новому стационарному режиму связан с нарастанием или убыванием энергии этих полей и сопровождается возникновением переходного процесса, который заканчивается, как только прекращается изменение запаса энергии. Если при коммутации энергетическое состояние цепи не изменяется, то переходные процессы не возникают.

Переходные процессы наблюдаются при коммутациях, когда изменяется стационарный режим электрической цепи, имеющей элементы, способные запасать энергию. Они возникают при следующих операциях: а) включении и выключении цепи; б) коротком замыкании отдельных ветвей или элементов цепи; в) отключении или под-

ключении ветвей или элементов цепи и т. д. Кроме того, переходные процессы возникают при воздействии на электрические цепи импульсных сигналов.

При рассмотрении переходных процессов обычно считают, что коммутация производится в момент $t=0$, а следовательно, и начало переходных процессов совпадает с этим моментом времени. Момент времени непосредственно перед коммутацией условно обозначим $t(0_-)$, а момент времени непосредственно после коммутации — $t(0_+)$.

Воспользуемся положением о том, что ток в катушке и напряжение на конденсаторе могут изменяться во времени только плавно, без скачков, и сформулируем два важных правила, получивших название законов коммутации.

Первый закон коммутации: *ток в катушке индуктивности, протекающий в момент после коммутации, равен току, протекавшему в катушке в момент перед коммутацией.* Обозначая эти токи соответственно символами $i_L(0_+)$ и $i_L(0_-)$, можно записать:

$$i_L(0_-)=i_L(0_+).$$

Второй закон коммутации: *напряжение на конденсаторе в момент после коммутации* $u_C(0_+)$ *равно напряжению* $u_C(0_-)$, *которое имелось на нем в момент перед коммутацией.* Математически это записывается равенством

$$u_C(0_-)=u_C(0_+).$$

Эти равенства выражают начальные условия, имеющие место в цепи при коммутации. Строго говоря, каждый реальный элемент электрической цепи обладает некоторой индуктивностью и емкостью и поэтому в них не могут скачком изменяться ни токи, ни напряжения. Однако в цепях с идеализированными сосредоточенными параметрами, где можно пренебречь индуктивностью резисторов и конденсаторов, а также емкостью резисторов и катушек, допустимо считать, что напряжения на резисторах и катушках, а также токи в резисторах и конденсаторах могут изменяться скачком, так как при этом не происходит мгновенного изменения количества энергии, накопленной в магнитном и электрическом поле цепи. Следовательно, в линейных цепях, состоящих из источников энергии и резисторов, переходные процессы, связанные с изменением запасенной энергии, вообще не возникают.

Начальные условия

Коммутация может производиться как в обесточенной электрической цепи (например, первоначальное подключение цепи к источнику энергии), так и в цепи, уже находящейся под током (отключение цепи от источника энергии, переключение отдельных ветвей и т. д.). Если в момент, непосредственно предшествующий коммутации, токи в ветвях электрической цепи и напряжения на конденсаторах были равны нулю, т. е. ни один из реактивных элементов цепи не обладал запасом энергии $i_L(0_-)=0$, $u_C(0_-)=0$, то считают, что в цепи имеют место нулевые начальные условия. Так например, при первоначальном подключении какой-либо цепи к источнику питания в ней возникает переходный процесс с нулевыми начальными условиями, характер и продолжительность кото-

рого определяются воздействующим сигналом, структурой (схемой) цепи и параметрами ее элементов. При нулевых начальных условиях согласно законам коммутации ток в катушке в первый момент после коммутации $i_L(0_+)=0$ и ветвь электрической цепи, куда включена катушка, оказывается как бы разомкнутой; напряжение на незаряженном конденсаторе в первый момент после коммутации $u_C(0_+)=$ $=0$ и конденсатор как бы замыкает накоротко те узлы цепи, между которыми он включен.

Если в цепи перед коммутацией имелись катушки, через которые протекали токи $i_L(0_-)\neq 0$, или заряженные конденсаторы $u_C(0_-)\neq$ $\neq 0$, т. е. если в цепи к моменту изменения ее состояния была запасена энергия в форме электрического или магнитного поля, определяемая происходившим до коммутации процессом, то считают, что в цепи имеют место *ненулевые начальные условия*. Переходный режим в этом случае, кроме параметров воздействующего сигнала и самой цепи, зависит и от ненулевых начальных условий. Знание начальных условий обязательно для анализа и расчета переходного процесса, причем совершенно безразлично, каким способом эти начальные условия в цепи были созданы.

Согласно законам коммутации при ненулевых начальных условиях в первый момент после коммутаций, т. е. в момент $t(0_+)$, катушка равносильна источнику тока $i_L(0_-)$, а конденсатор — источнику э. д. с. $u_C(0_-)$. Таким образом, ток в катушке и напряжение на конденсаторе начнут изменяться с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

Переходные процессы с ненулевыми начальными условиями возникают в электрических цепях при следующих обстоятельствах: а) разряде заряженного конденсатора; б) шунтировании, коротком замыкании, отключении элементов цепи, подсоединенной к источнику энергии; в) отключении источника энергии без разрыва цепи; г) изменении параметров воздействующего сигнала и т. д.

Во всех приведенных примерах предполагается, что в момент коммутации электрические цепи находились в установившемся режиме.

Свойства показательной функции. Понятие о постоянной времени

При анализе переходных процессов нам постоянно будет встречаться некоторая показательная функция времени, которая называется экспоненциальной функцией (или кратко экспонентой).

Экспоненциально убывающая (затухающая) с течением времени функция $a(t)$ математически записывается так:

$$a\ (t) = Ae^{-\alpha t},$$

где A — постоянная, определяющая начальное значение функции, т. е. значение $a(t)$ в момент $t=0$; α — коэффициент затухания; t — время; $e\approx 2{,}72$ — число, представляющее собой основание натуральных логарифмов.

Показательная функция имеет область определения при любых (действительных) значениях переменной $t<0$ и $t\geqslant 0$. Однако область определения для рассматриваемой нами экспоненциальной функции $a(t)$ ограничим значениями времени $t\geqslant 0$ и будем считать ее равной нулю $a(t)=0$ при $t<0$, поскольку все интересующие нас процессы

в электрических цепях имеют место при $t \geqslant 0$ (напомним, что коммутация в цепи происходит в момент $t=0$).

Рассмотрим некоторые свойства экспоненциальной функции $e^{-\alpha t}$. Прежде всего отметим, что

$$e^{-\alpha t} = \frac{1}{e^{\alpha t}}.$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$e^{-\alpha 0} = \frac{1}{e^0} = 1,$$

поскольку всякое число в нулевой степени равно единице. С увеличением t знаменатель дроби $1/e^{\alpha t}$ возрастает и, следовательно, функция $e^{-\alpha t}$ уменьшается, причем при любых $t \geqslant 0$ принимает только положительные значения. При неограниченном возрастании t ($t \to \infty$) значения функции $e^{-\alpha t}$ стремятся к нулю ($e^{-\alpha t} \to 0$).

Таким образом, при изменении t от 0 до ∞ величина функции $e^{-\alpha t}$ монотонно уменьшается от своего наибольшего значения, равного единице, до нуля при $t \to \infty$. Чем больше α, тем быстрее убывает функция $e^{-\alpha t}$, поэтому данный коэффициент называется *коэффициентом затухания*.

График, качественно иллюстрирующий изменение функции $a(t)$, показан на рис. 4. Отметим на кривой произвольную точку O, соответствующую моменту времени t_1, и проведем в этой точке касательную до пересечения ее с осью абсцисс в точке N. Угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс, обозначим γ. Определим величину отрезка MN, который в математике называется подкасательной. Из треугольника ONM находим:

$$\operatorname{tg}(180° - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma = \frac{OM}{MN},$$

откуда

$$MN = -\frac{OM}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

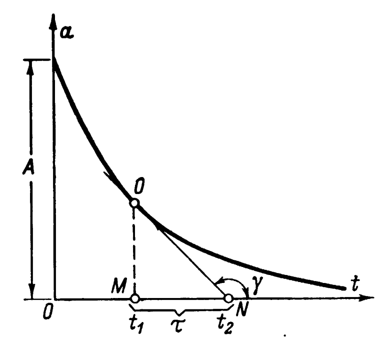


Рис. 4. Определение постоянной времени экспоненциальной функции.

Ордината OM определяет величину функции $a(t)$ в момент t_1 и равна:

$$OM = a(t_1) = Ae^{-\alpha t_1}.$$

Вычислим производную функции $a(t)$ в точке O. Общее выражение производной экспоненциальной функции, которое нам понадобится в дальнейшем, имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t}.$$

В точке O значение производной будет:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_1} = -\alpha A e^{-\alpha t_1}.$$

Величина производной в точке O численно равна тангенсу угла наклона касательной или иначе угловому коэффициенту касательной, проведенной в этой точке, т. е.

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_1} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Таким образом, искомый отрезок MN численно равен:

$$MN = -\frac{Ae^{-\alpha t_1}}{-\alpha A e^{-\alpha t_1}} = \frac{1}{\alpha},$$

т. е. подкасательная экспоненциальной функции постоянна, не зависит от выбора точки на кривой и от начального значения функции.

Величина, соответствующая отрезку MN на оси абсцисс и имеющая размерность времени, называется **постоянной времени** и обозначается буквой τ. Термин «постоянная времени» отражает постоянство величины подкасательной в любой точке экспоненты. Постоянная времени есть величина, обратная коэффициенту затухания:

$$\tau = 1/\alpha.$$

Используя постоянную времени, экспоненциально убывающую функцию можно записать в виде

$$a(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Как известно из курса математики, экспоненциальная функция $e^{-\frac{t}{\tau}}$ (или $e^{-\alpha t}$) может быть разложена в ряд

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \ldots$$

С удовлетворительной для практики точностью при $t/\tau < 1$ функцию можно аппроксимировать несколькими первыми членами ряда. Так, если ограничиться первыми двумя членами ряда разложения

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{t}{\tau}, \qquad (1)$$

то погрешность не превысит 10%, когда $t/\tau \leqslant 0{,}35$, и всего 1,2% при $t/\tau \leqslant 0{,}15$.

Нам также часто придется встречаться с экспоненциальной функцией времени

$$a_1(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

величина которой, как это легко заметить, при $t=0$ равна нулю, а при увеличении t монотонно возрастает, стремясь к значению A при $t \to \infty$.

В табл. 2 приведены некоторые значения функций $e^{-\frac{t}{\tau}}$ и $1-e^{-\frac{t}{\tau}}$

На рис. 5 построены графики экспоненциальных функций, причем величина A принята равной единице. Отметим интересные особенности экспоненциальных кривых.

Таблица 2

t	$0{,}05\tau$	$0{,}1\tau$	$0{,}5\tau$	1τ	$1{,}5\tau$	2τ	$2{,}5\tau$	3τ	4τ	5τ	∞
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	0,95	0,9	0,6	0,37	0,22	0,13	0,08	0,05	0,02	0,007	0
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	0,05	0,1	0,4	0,63	0,78	0,87	0,92	0,95	0,98	0,993	1

По прошествии промежутка времени, равного постоянной времени ($t=\tau$), величина экспоненциально убывающей функции $a(t)$ (рис. 5,*а*) становится в e раз меньше начального значения (действи-

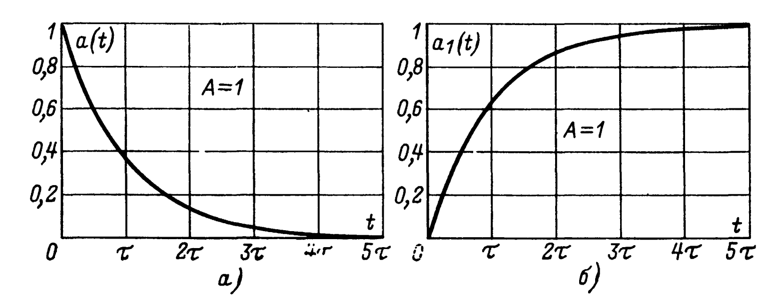


Рис. 5. Графики экспоненциальных функций.

а — убывающей функции $e^{-\frac{t}{\tau}}$, *б* — функции $1-e^{-\frac{t}{\tau}}$.

тельно, $e^{-1}=1/e=0{,}37$). Как видно из графика, с течением времени величина этой функции вначале быстро уменьшается (интервал времени от 0 примерно до 3τ), а затем скорость убывания замедляется (скорость убывания пропорциональна ординате функции $e^{-\frac{t}{\tau}}$).

Скорость убывания величины функций $a(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ в любой точке определяется ее производной

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Скорость убывания обратно пропорциональна постоянной времени, неодинакова в различные моменты времени (как мы это могли уже видеть из рассмотрения графика) и имеет наибольшее значение (по абсолютной величине) в начальный момент ($t=0$)

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{макс}} = \frac{1}{\tau}.$$

Теоретически процесс, описываемый экспоненциально убывающей функцией, длится бесконечно долго (поскольку $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$ лишь при $t \to \infty$). Однако на практике процесс считают закончившимся через время $t_{\text{уст}} = 3\tau$, которое называют **временем установления**; за это время величина $e^{-\frac{t}{\tau}}$ уменьшается до 0,05 начального значения. Иногда продолжительность процесса ограничивают промежутком $t'_{\text{уст}} = 2,3\tau$, когда величина $e^{-\frac{t}{\tau}}$ становится равной 0,1 начального значения.

Экспоненциальная кривая, описываемая функцией $a_1(t)$, монотонно возрастает и через промежуток, равный постоянной времени $t=\tau$, достигает 0,63 установившегося значения (рис. 5,*б*). Скорость возрастания величины функции $1-e^{-\frac{t}{\tau}}$ обратно пропорциональна ее ординате. Действительно, например, в интервале от 0 до 2τ величина функции возрастает на 87%, а на таком же промежутке от 2 до 4τ — только на 11%. Математически скорость нарастания функции $a_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ определяется ее производной

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Она также обратно пропорциональна постоянной времени и имеет наибольшее значение в начальный момент времени ($t=0$)

$$\left(\frac{da_1}{dt}\right)_{\text{макс}} = \frac{1}{\tau}.$$

Процесс, описываемый экспоненциальной функцией $a_1(t)$, теоретически также продолжается бесконечно долго, так как $a_1(t)$ стремится к установившемуся значению только при $t \to \infty$. Однако принято считать процесс практически закончившимся через промежуток $t_{\text{уст}}=3\tau$, т. е. когда величина $a_1(t)$ становится равной 0,95 установившегося значения. Если процесс ограничить моментом, когда величина $a_1(t)$ достигнет 0,9 установившегося значения, то его продолжительность составит $t'_{\text{уст}}=2,3\tau$.

ПОНЯТИЕ ОБ ОСНОВНЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

«Классический» метод

Переходные процессы в электрических цепях описываются уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа для мгновенных значений напряжения и тока. Для цепей с сосредоточенными параметрами эти уравнения после соответствующих математических преобразований приводятся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения изучаются в курсе высшей математики. Здесь мы приведем лишь краткие сведения о методах составления и отыскания решения дифференциальных уравнений, разъясняя их физический смысл.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные. В рассматриваемых ниже уравнениях независимой переменной является время t, а неизвестной функцией $x(t)$ — напряжение или ток в интересующей нас части цепи. Дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция зависит только от одного аргумента (в нашем случае времени), называются обыкновенными. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производными в уравнение обращает его в тождество. Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Переходные процессы в электрических цепях, содержащих кроме активных сопротивлений и источников энергии один реактивный элемент — катушку (цепи RL) или конденсатор (цепи RC), описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. При этом последовательно или параллельно соединенные индуктивности (емкости) следует считать за одну индуктивность (емкость).

После простых преобразований дифференциальное уравнение первого порядка для электрической цепи с одним реактивным элементом может быть приведено к виду

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = z(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ — искомая функция (напряжение или ток); τ — постоянная времени цепи; $z(t)$ — известная функция, которая характеризует внешнее воздействие на электрическую цепь (напряжение или ток внешнего источника).

При $z(t)=0$ получается уравнение без правой части, которое называется однородным дифференциальным уравнением:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = 0. \tag{3}$$

Однородными уравнениями описываются переходные процессы в электрических цепях, в которых отсутствуют внешние воздействия. Это цепи с ненулевыми начальными условиями; переходные процессы в них возникают вследствие изменения количества энергии в электрическом или магнитном поле (например, процессы, возникающие при замыкании заряженного конденсатора на резистор).

В математике существуют различные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. При расчете переходных процессов обычно пользуются так называемым «классическим» методом. Согласно этому методу решение дифференциального уравнения (2) необходимо искать в виде суммы двух слагаемых

$$x(t) = x_{в}(t) + x_{св}(t),$$

где $x_{в}(t)$ — вынужденная составляющая искомой функции (так называемое частное решение исходного уравнения); $x_{св}(t)$ — свободная составляющая искомой функции (так называемое общее решение соответствующего однородного уравнения, получаемого из уравнения (2) при $z(t) = 0$).

Вынужденная составляющая $x_{в}(t)$ зависит от правой части дифференциального уравнения, т. е. от характера внешних воздействий. Если воздействующая функция, стоящая в правой части уравнения (2), постоянна или же является периодической функцией времени, то значение вынужденного тока (напряжения) совпадает с установившимся и, таким образом, $x_{в}(t)$ представляет искомый ток (напряжение) в установившемся режиме работы электрической цепи. Это решение может быть найдено известными методами, используемыми при расчетах установившихся режимов линейных электрических цепей.

Свободная составляющая $x_{св}(t)$ физически характеризует процессы в электрической цепи, в которой отсутствует внешнее воздействие. Следовательно, функция $x_{св}(t)$ определяет ток (напряжение), возникновение которого обусловлено изменением начального запаса энергии в магнитном или электрическом поле цепи и характер которых определяется структурой цепи и начальными условиями. Однако в цепи, где отсутствуют источники энергии, т. е. в пассивной цепи, вследствие тепловых потерь в резисторах, соединительных проводах и т. д. свободные токи не могут протекать сколь угодно долго и непременно с течением времени должны затухать. Во всех линейных электрических цепях свободные составляющие токов (напряжений) затухают по экспоненциальному закону, поэтому решение $x_{св}(t)$ математически выражается экспоненциальной функцией

$$x_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где A — некоторая постоянная, называемая постоянной интегрирования.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (2) можно представить в виде

$$x(t) = x_{в}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4)$$

В электрической цепи, процесс в которой описывается однородным уравнением (3), очевидно будут иметь место только свободные составляющие токов и напряжений, ибо вынужденные составляющие в цепи, где отсутствует внешнее воздействие, равны нулю. Таким образом, решение однородного уравнения содержит лишь свободную составляющую

$$x(t) = x_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5)$$

Постоянная A находится из начальных условий, которые вытекают из физических свойств цепи. В связи с этим решение задач по переходным процессам «классическим» методом требует ясного понимания физических процессов, происходящих в цепи.

Уравнение (4) показывает, что переходный процесс, происходящий в цепи, можно рассматривать состоящим из двух накладывающихся друг на друга независимых процессов: вынужденного, который как бы наступил сразу, и свободного, имеющего место во время переходного режима. Благодаря свободным составляющим токи и напряжения в цепи в течение переходного процесса непрерывно приближаются к своим вынужденным значениям. Следовательно, токи и напряжения во время переходного процесса могут быть представлены суммой двух составляющих: вынужденной и свободной. Сумма вынужденной $i_{\text{в}}$ и свободной $i_{\text{св}}$ составляющих тока дает значение полного тока i, который в действительности протекает в какой-либо ветви при переходном процессе $i=i_{\text{в}}+i_{\text{св}}$. Сумма вынужденной $u_{\text{в}}$ и свободной $u_{\text{св}}$ составляющих напряжения дает полное напряжение u, которое фактически имеется между какими-либо точками цепи при переходном процессе $u=u_{\text{в}}+u_{\text{св}}$. С течением времени свободные составляющие затухают и в цепи устанавливается стационарный режим.

Конечно, физически существуют только полные токи и напряжения, а разложение их на вынужденную и свободную составляющие является удобным математическим приемом, используемым в «классическом» методе. Такой метод анализа применим лишь к цепям, подчиняющимся принципу суперпозиции, т. е. к линейным цепям.

Отыскание решения, которое для дифференциального уравнения (2) определяется выражением (4), целесообразно производить в следующем порядке:

а) с помощью законов Ома и Кирхгофа вычисляется вынужденная (установившаяся) составляющая тока (напряжения) $x_{\text{в}}(t)$;

б) используя начальные условия, определяется постоянная A. Для этого из выражения (4) при $t=0$ находится искомая функция в начальный момент времени $x(0)=x_{\text{в}}(0)+A$, ибо $1/e^0=1$. То же решение $x(0)$ можно найти на основании законов коммутации, исходя из физических явлений в цепи $x(0)=X_0$, из равенства $X_0=x_{\text{в}}(0)+A$ вычисляется постоянная A;

в) записывается окончательное выражение искомой функции.

Более просто, только с помощью операций б) и в), находится решение однородного уравнения (3), так как в этом случае $x_{\text{в}}(t)=0$.

Рассмотрим пример. Пусть в электрической цепи (рис. 6,*а*) до коммутации ток не протекал; в момент $t=0$ она подключается к источнику постоянного напряжения E. Найдем ток в цепи. Прежде всего отметим, что это цепь с нулевыми начальными условиями. Преобразуем схему цепи, заменив последовательно соединенные индуктивности L_1 и L_2 одной $L=L_1+L_2$ (рис. 6,*б*). Зададимся положительным направлением тока в цепи, показанным на рис. 6,*б* стрелкой. Воспользуемся вторым законом Кирхгофа (сумма падений напряжения на отдельных элементах последовательной цепи равна внешней э. д. с.) и для цепи рис. 6,*б* запишем уравнение

$$u_L(t)+u_R(t)=E,$$

справедливое для времени $t\geqslant 0$. Подставим значения $u_L(t)$ и $u_R(t)$, взяв их из табл. 1, с учетом того, что для схемы рис. 6,*б* $i_L=i_R=i(t)$.

Тогда

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = E.$$

Разделив обе части уравнения на R, получим:

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R}$$

Как и следовало ожидать, получилось дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее неизвестную функцию [ток $i(t)$] и ее первую производную di/dt. Постоянная времени в этом случае

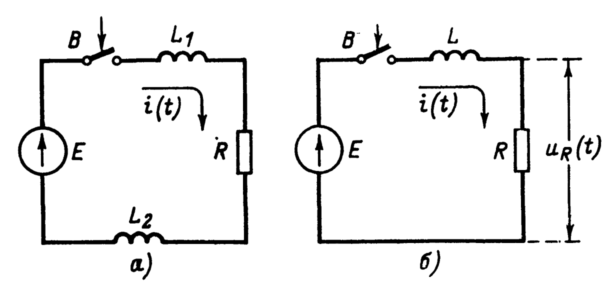


Рис. 6. Включение в цепь RL источника постоянной э. д. с.

а — исходная схема; *б* — эквивалентная схема.

$\tau = L/R$, а внешнее воздействие $z(t) = E/R = \text{const}$. Согласно формуле (4) решение полученного уравнения следует искать в виде суммы

$$i(t) = i_{в}(t) + i_{св}(t) = i_{в}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Находим вынужденную составляющую тока $i_{в}(t)$, которая в этом случае совпадает с установившимся значением тока в цепи I_0. По закону Ома определяем

$$i_{в}(t) = I_0 = E/R.$$

Воспользовавшись начальными условиями, найдем постоянную A. Из выражения для $i(t)$ при $t=0$ имеем $i(0) = i_{в}(0) + A = I_0 + A$. С другой стороны, согласно первому закону коммутации ток $i(0_-) = i(0_+) = i(0) = 0$, так как в момент, непосредственно предшествующий коммутации, тока в цепи не было. Таким образом, используя полученные выражения для $i(0)$, можно записать $0 = I_0 + A$, откуда $A = -I_0$.

Следовательно, свободная составляющая тока в цепи будет равна:

$$i_{св}(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Записываем теперь выражение для полного тока в цепи

$$i(t) = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right). \qquad (6)$$

Примеры использования «классического» метода анализа различных цепей приводятся также в следующих главах.

Остановимся на частном случае решения уравнения (2). На практике часто приходится встречаться с цепями RL или RC, ко входу которых в момент $t=0$ подключается источник постоянного напряжения (тока), а также с цепями, работающими в установившемся режиме на постоянном токе и в которых происходит коммутация отдельных элементов. В таких случаях для определения любого переходного тока (напряжения) можно не составлять исходное уравнение (2), а сразу записывать решение в следующей форме:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если искомой функцией является ток $x(t)=i(t)$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{7}$$

а если необходимо найти напряжение $x(t)=u(t)$, то

$$u(t) = u(\infty) + [u(0) - u(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{8}$$

где $i(\infty)$, $u(\infty)$ — значения искомой функции в установившемся режиме, т. е. при $t=\infty$; $i(0)$, $u(0)$ — начальные значения искомого тока и напряжения при $t=0$; τ — постоянная времени цепи.

Величины $i(\infty)$, $u(\infty)$, $i(0)$, $u(0)$ и τ легко находятся непосредственно из рассмотрения схемы цепи. При этом удобно руководствоваться следующими правилами:

а) при отыскании начального тока $i(0)$ или напряжения $u(0)$ незаряженный конденсатор может быть заменен короткозамыкающим элементом, так как согласно второму закону коммутации начальное напряжение $u_C(0)=0$, а катушка, через которую не протекал ток, — бесконечно большим сопротивлением, т. е. разрывом соответствующего участка цепи, так как по первому закону коммутации $i_L(0)=0$;

б) при определении установившихся значений $i(\infty)$ и $u(\infty)$ конденсатор может быть заменен бесконечно большим сопротивлением или разрывом соответствующего участка цепи, так как $i_C(\infty)=0$, а катушка — короткозамыкающим элементом, так как $u_L(\infty)=0$;

в) в цепи с ненулевыми начальными условиями заряженный до напряжения $u_C(0)=U_0$ конденсатор может быть заменен незаряженным конденсатором, соединенным последовательно с источником постоянной э. д. с. $E_C=-U_0$;

г) для нахождения постоянной времени цепи источник э. д. с. заменяется короткозамкнутым элементом, если внутреннее сопротивление источника равно нулю, или сопротивлением r_i.

Переходные процессы в одноконтурных электрических цепях, содержащих активные сопротивления и два реактивных элемента — индуктивность и емкость (цепи RLC), математически выражаются дифференциальными уравнениями второго порядка. Решение дифференциальных уравнений второго порядка также может быть найдено «классическим» методом.

Переходные процессы в разветвленных электрических цепях RLC описываются уравнениями более высоких порядков, для кото-

рых использование «классического» метода сопряжено с громоздкими и трудоемкими вычислительными операциями, связанными с необходимостью определения постоянных интегрирования из начальных условий. Поэтому такой метод анализа имеет ограниченное применение и, в основном, используется для анализа цепей, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями первого и второго порядка. Кроме того, «классический» метод мало пригоден для анализа переходных процессов, возникающих при воздействии на цепь импульсных напряжений (токов).

Для технических расчетов часто более удобным является операторный метод анализа переходных процессов.

Операторный метод

Действия над многозначными числами (умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня), как известно, существенно упрощаются при использовании логарифмов. Так, операция умножения сводится к сложению логарифмов, деление — к вычитанию логарифмов и т. д. Каждому числу соответствует свой логарифм, и поэтому логарифм можно рассматривать как своего рода и з о б р а ж е н и е ч и с л а. Так, например, в системе десятичных логарифмов $\lg 100 = 2$, следовательно, в этой системе 2 есть изображение числа 100.

В основе операторного метода также лежит понятие об изображении. Однако, если в случае логарифмов речь шла об изображении числа, то в операторном методе используется и з о б р а ж е н и е ф у н к ц и й в р е м е н и. Здесь каждой функции времени $f(t)$, определенной в области $t \geqslant 0$, соответствует некоторая функция $F(p)$ новой переменной p, имеющей размерность $[c^{-1}]$, и, наоборот, функции переменной $F(p)$ соответствует определенная функция времени $f(t)$.

Функция $f(t)$ называется о р и г и н а л о м, функция $F(p)$ — и з о б р а ж е н и е м, а переменная p — о п е р а т о р о м. Фраза «функция (оригинал) $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$» условно записывается так:

$$F(p) \doteq f(t).$$

Знак $\doteq$ называют знаком соответствия. В дальнейшем в тексте изображение напряжения будет записываться в виде $U(p) \doteq u(t)$, изображение тока — $I(p) \doteq i(t)$.

Отметим, что практически все функции времени (ток, напряжение), отображающие реальные переходные процессы в электрических цепях, имеют изображения.

Нахождение изображений функций времени (равно как и обратные переходы от изображения к оригиналу) выполняется с помощью специальных интегральных преобразований, приводимых в курсе высшей математики. В большей части современной технической литературы применяется преобразование Лапласа. Однако в практике расчета электрических цепей распространено также функциональное преобразование, называемое преобразованием Карсона, достоинством которого являются одинаковые размерности оригинала и изображения. Изображения одной и той же функции, полученные с помощью этих двух преобразований, отличаются друг от друга только множителем p. Мы в дальнейшем будем пользоваться изображениями

функций, полученных с помощью преобразования Карсона, в основе которого лежит равенство

$$F(p) = p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

где $f(t)$ — функция времени; e^{-pt} — экспоненциальная операторная функция; $\int_0^\infty dt$ — определенный интеграл подынтегральной функции в пределах от $t = 0$ до $t = \infty$.

Все выражение в целом показывает, какую операцию нужно проделать с функцией времени, чтобы получить ее изображение.

Для читателей, не знакомых с понятием определенного интеграла, без ущерба для дальнейшего понимания можно не вникать в существо самой операции преобразования, а просто уяснить, что над функцией времени осуществляют определенную математическую операцию, в результате чего получают ее изображение. Данную рекомендацию можно считать вполне оправданной, так как для подавляющего большинства функций, встречающихся на практике, изображения уже вычислены. В специальной литературе (например, в [Л. 4]) есть таблицы изображений большого числа функций. Изображения некоторых часто встречающихся функций приведены в табл. 3.

При помощи табл. 3 можно по изображению найти соответствующую исходную функцию времени и, наоборот, по оригиналу найти соответствующее изображение. Полезно обратить внимание, что изображением постоянной является сама постоянная

$$A \doteqdot A.$$

Сформулируем без доказательства следующие важные теоремы, которые понадобятся нам в дальнейшем:

а) изображение произведения постоянной величины A на функцию времени $f(t)$ равно произведению A на изображение этой функции, т. е.

$$AF(p) \doteqdot Af(t);$$

б) изображение суммы нескольких функций равно сумме изображений этих функций

$$F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) \doteqdot f_1(t) + f_2(t) + f_3(t).$$

При расчете переходных процессов операторным методом предполагается, что действующий на цепь сигнал появляется в момент $t=0$; для промежутка $t<0$ все временные функции в табл. 3 должны быть приняты равными нулю.

Изображение производной функции времени $f(t)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}[f(t)] \doteqdot pF(p),$$

а изображение интеграла этой функции, взятого в пределах от 0 до t,

$$\int_0^t f(t)\, dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

Здесь наглядно видны достоинства операторного метода, позволяющего операции дифференцирования и интегрирования функций времени заменить простым алгебраическим умножением и делением изображения этих функций на оператор p.

Таблица 3

№ табличной формулы	Функция времени $f(t)$ (оригинал)	Изображение $F(p)$
3-1	A	A
3-2	t	$1/p$
3-3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{p}{p+\alpha}$
3-4	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p+\alpha}$
3-5	$\frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}+\alpha t-1)$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
3-6	$te^{-\alpha t}$	$\frac{p}{(p+\alpha)^2}$
3-7	$\sin\omega t$	$\frac{p\omega}{p^2+\omega^2}$
3-8	$\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
3-9	$\frac{e^{-(\alpha-\beta)t}-e^{-(\alpha+\beta)t}}{2\beta}$ при $\alpha>\omega_0$; $te^{-\alpha t}$ при $\alpha=\omega_0$; $\frac{1}{\omega_{св}}e^{-\alpha t}\sin\omega_{св}t$ при $\alpha<\omega_0$, где $\beta=\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$; $\omega_{св}=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$	$\frac{p}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}$

В дифференциальных уравнениях электрической цепи производная, например, встречается в выражении для напряжения на катушке $u_L(t)=Ldi_L/dt$. Обозначив изображение тока $i_L(t)$ символом $I_L(p)$, получим изображение для напряжения $u_L(t)$

$$U_L(p)=pLI_L(p).$$

Интеграл чаще всего встречается в выражении для напряжения на конденсаторе

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt.$$

Обозначив изображение тока $i_C(p) \doteq I_C(t)$, получим изображение для напряжения $u_C(t)$

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC}.$$

Суть операторного метода анализа переходных процессов состоит в следующем. Исходные дифференциальные уравнения электрической цепи заменяются соответствующими уравнениями в операторной форме, методы решения которых ничем не отличаются от решения обычных алгебраических уравнений. Из операторного алгебраического уравнения находится изображение искомой функции (ток, напряжение). Затем по изображению определяется оригинал искомой функции.

Таким образом, анализ переходных процессов операторным методом предусматривает следующие три этапа: а) составление операторного уравнения для искомого тока (напряжения); б) определение изображения тока (напряжения) из полученного операторного уравнения; в) нахождение искомой функции времени тока (или напряжения) по ее изображению.

Рассмотрим, как выполняются эти операции. Для составления операторного уравнения вовсе не обязательно предварительно составлять дифференциальное уравнение. Можно непосредственно составлять уравнения, выражающие законы Кирхгофа в операторной форме. Первый закон Кирхгофа в операторной форме в применении к узлу цепи записывается в виде

$$\sum_1^n I_n(p) = 0,$$

где $\sum_1^n I_n(p) = I_1(p) + I_2(p) + \ldots + I_n(p)$ — математическая запись суммы n слагаемых; $I_n(p)$ — изображение тока, протекающего в n-й ветви.

Второй закон Кирхгофа в операторной форме в применении к замкнутому контуру цепи записывается в виде

$$\sum_1^n E_n(p) = \sum_1^n U_n(p),$$

где $E_n(p)$ — изображение n-й э. д. с. источника энергии; $U_n(p)$ — изображение падения напряжения на n-м элементе контура. Численное значение n для левой и правой частей выражения в общем случае различно.

При составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительным направлением токов и соблюдать

все правила знаков, как и при составлении уравнений Кирхгофа для функций времени. Для записи операторных уравнений удобно пользоваться табл. 4, в которой в операторной форме приведены соотношения между напряжениями и токами (их мгновенными значениями) на элементах R, L, C при *нулевых* начальных условиях $i_L(0)=0$ и $u_C(0)=0$.

Таблица 4

Элемент цепи	Падение напряжения	Ток
R (+ $U_R(p)$ −, $I_R(p)$ →)	$U_R(p) = RI_R(p)$	$I_R(p) = \frac{U_R(p)}{R}$
L (+ $U_L(p)$ −, $I_L(p)$ →)	$U_L(p) = pLI_L(p)$	$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL}$
C (+ $U_C(p)$ −, $I_C(p)$ →)	$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC}$	$I_C(p) = pCU_C(p)$

Интересно отметить, что приведенные соотношения для элементов L и C можно получить из формул табл. 1 (при нулевых начальных условиях) путем замены оператора d/dt алгебраическим множителем p и оператора $\int dt$ — множителем $1/p$. Соотношения в табл. 4 позволяют формально ввести понятия об операторных сопротивлениях индуктивности (pL), емкости ($1/pC$) и резистора (R).

Если цепь содержит начальные запасы энергии, т. е. $i_L(0)\neq 0$ и $u_C(0)\neq 0$, то напряжения и токи в элементах цепи связаны между собой следующими операторными зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} U_L(p) &= pLI_L(p) - pLi_L(0); \\ I_L(p) &= \frac{U_L(p)}{pL} + i_L(0); \\ U_C(p) &= \frac{I_C(p)}{pC} + u_C(0); \\ I_C(p) &= pCU_C(p) - pCu_C(0). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Таким образом, при анализе переходных процессов операторным методом при составлении уравнений цепи автоматически учитываются

начальные условия — токи в катушках и напряжения на конденсаторах. В этом проявляется одно из очевидных достоинств данного метода, так как отпадает необходимость дополнительно определять постоянные интегрирования.

Второй этап исследования цепи операторным методом заключается в том, что из полученного операторного уравнения, которое представляет собой обычное алгебраическое уравнение, находится изображение искомого тока (напряжения). Выражение для изображения искомой функции обычно приводится к дроби $X(p)=M(p)/N(p)$, числитель и знаменатель которой являются многочленами от p. Во всех физически осуществимых цепях высшая степень p в числителе дроби всегда меньше или равна высшей степени p в знаменателе. В частном случае числитель может в явном виде не содержать p, т. е. иметь p в нулевой степени.

Последняя операция — отыскание оригинала искомой функции времени по ее изображению — выполняется с помощью таблиц изображений. Если же изображение нельзя привести к какой-либо из формул, имеющихся в таблице, то для нахождения оригинала используются специальные методы, которые мы здесь не рассматриваем; их описание можно найти, например, в книгах [Л. 1—4].

Рассмотрим пример. Найдем ток $i(t)$ в цепи, показанной на рис. 6,*б*, если, как и прежде, в момент $t=0$ замыкается выключатель. Изображение искомого тока обозначим $I(p)$, а положительное направление его указано на схеме стрелкой. Воспользуемся вторым законом Кирхгофа в операторной форме и запишем уравнение

$$U_L(p)+U_R(p)=E(p).$$

Используя соотношения табл. 4 и вспоминая, что изображением постоянной величины E будет сама постоянная $E \doteq E$, можно записать:

$$pLI(p)+RI(p)=E.$$

Вместо дифференциального получилось обыкновенное алгебраическое уравнение с неизвестной функцией $I(p)$. Решая это уравнение, получим выражение для изображения тока

$$I(p)=E\frac{1}{pL+R}.$$

В данном случае числитель дроби содержит p в нулевой степени, а знаменатель — в первой. Подобного изображения в табл. 3 нет, но сделав простые и очевидные преобразования, перепишем последнее уравнение в виде

$$I(p)=\frac{E}{R}\,\frac{R/L}{p+R/L}.$$

Первый множитель правой части является постоянной величиной, второй есть в табл. 3 [см. формулу (3-4), полагая $\alpha=R/L$]. Таким образом, сразу находим оригинал искомой функции

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Результат, естественно, совпадает с решением, полученным «классическим» методом.

Примеры анализа переходных процессов операторным методом также приводятся в следующих главах.

Суперпозиционный метод. Переходная характеристика цепи

Методы анализа переходных процессов, описанные в предыдущих разделах, оказываются удобными в тех случаях, когда внешние воздействия имеют сравнительно простой вид, и практически непригодны, если воздействующий сигнал меняется во времени сложным образом. Для анализа переходных процессов в электрических цепях, подвергающихся воздействию напряжений (токов) сложной формы, удобно пользоваться методом суперпозиции (наложения). Такой метод применим только к линейным цепям с нулевыми начальными условиями.

Суть метода суперпозиции заключается в следующем. Воздействующий на цепь сигнал сложной формы $z(t)$ представляется в виде суммы n-го числа элементарных однотипных сигналов стандартной формы $z_n(t)$, т. е. $z(t) = \sum_1^n z_n(t)$. Находятся отклики цепи $x_n(t)$, обусловленные действием каждого элементарного сигнала, и полученные результаты складываются, что в предположении линейности цепи допустимо, т. е. результирующий отклик $x(t) = \sum_1^n x_n(t)$. Таким образом, анализ переходного процесса, возникающего при воздействии на цепь сигнала сложной формы, сводится к анализу типового переходного процесса, вызываемого элементарным сигналом, и последующему суммированию полученных результатов.

В качестве элементарных воздействий используются сигналы стандартной формы, изменяющиеся во времени по простейшим законам. Это существенно упрощает анализ. Кроме того, подобные сигналы обычно легко получаются с помощью сравнительно простых устройств, что позволяет для анализа переходных процессов также использовать и экспериментальные методы.

К элементарным сигналам предъявляются определенные требования:

а) сумма элементарных сигналов стандартной формы должна позволить представить сигнал внешнего воздействия любой формы;

б) переходный процесс, вызываемый воздействием сигнала стандартной формы, должен быть возможно более простым.

При использовании принципа суперпозиции в качестве элементарного сигнала стандартной формы обычно выбирают так называемый единичный ступенчатый сигнал (сигнал включения).

Единичным ступенчатым сигналом называется сигнал (напряжение или ток), который при любом $t<0$ численно равен нулю, а при $t \geqslant 0$ равен 1. Функция единичного ступенчатого сигнала математически определяется соотношением

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 1 \text{ при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

и графически изображена на рис. 7,*а*.

Если единичный сигнал запаздывает на некоторое фиксированное время θ (рис. 7,*б*), то он обозначается символом $1(t-\theta)$, таким образом

$$1(t-\theta)=\begin{cases}0 \text{ при } t<\theta;\\ 1 \text{ при } t\geqslant\theta.\end{cases}$$

С помощью единичной функции может быть представлен любой изменяющийся во времени сигнал, воздействие которого на электрическую цепь начинается в некоторый определенный момент времени. Например, если $e(t)=E$ — постоянная э. д. с., действующая от $t=-\infty$ до $t=\infty$ (рис. 8,*а*), то произведение $E1(t)$ выражает так называемую э. д. с. **включения** (рис. 8,*б*)

$$E1(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0;\\ E \text{ при } t\geqslant 0,\end{cases} \qquad (10)$$

так как при $t<0$ множитель $1(t)=0$ и $1(t)=1$ при $t\geqslant0$.

Характер изменения реального воздействия, возникающего при включении в цепь источника постоянного напряжения, достаточно точно отображается э. д. с. включения, если время коммутации $\Delta t\to0$.

Поскольку воздействующие на электрическую цепь сигналы (напряжение, ток) возникают в определенные моменты времени (как мы условились считать в момент $t=0$), то функции, выражающие эти воздействия, строго говоря, должны содержать своим сомножителем единичную функцию $1(t)$. Однако в целях упрощения записи этот сомножитель часто опускается, если его отсутствие не приводит к недоразумению.

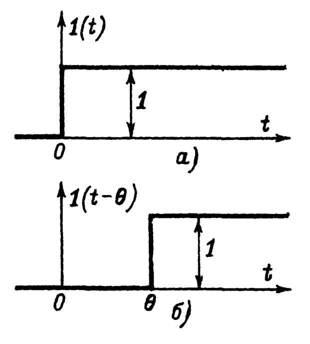


Рис. 7. Графики единичного ступенчатого сигнала.

а — сигнала, начинающегося в момент $t=0$; *б* — сигнала, запаздывающего на время θ.

При воздействии на электрическую цепь единичного ступенчатого сигнала возникает отклик, который можно рассматривать как некоторую временную характеристику цепи. Реакция цепи на действие единичного ступенчатого сигнала (напряжения или тока) называется **переходной характеристикой** цепи и обозначается символом $h(t)$. Такое название эта функция получила потому, что она характеризует поведение электрической цепи при ее переходе от одного стационарного состояния, когда воздействующий сигнал отсутствует, к другому, тоже стационарному, при постоянном (во времени) единичном внешнем воздействии. Переходная характеристика полностью отражает свойства электрической цепи, так как описывает все ее состояния от момента воздействия до установившегося режима.

Чтобы определить переходную характеристику цепи, необходимо, пользуясь «классическим» или операторным методом, найти интересующий нас выходной сигнал при воздействии на цепь единичного ступенчатого входного сигнала. Когда уже известна реакция цепи на воздействие сигнала включения $Z1(t)$ ($Z=\text{const}$), то выражение

переходной характеристики можно получить, приняв $\dot{Z}=1$. Подчеркнем, что использование переходной характеристики ставит своей целью определение переходного процесса, вызываемого воздействием на цепь сигнала сложной формы. Поэтому если искомый переходный процесс вызывается воздействием на цепь напряжения, то и переходная характеристика должна выражать переходный процесс, возникающий при воздействии на цепь единичного напряжения. Если искомый процесс обусловлен воздействием на цепь генератора тока, то и переходная характеристика должна выражать переходный процесс при воздействии на цепь единичного тока. Размерность переходной характеристики равна отношению размерностей выходного (искомого) и входного сигналов.

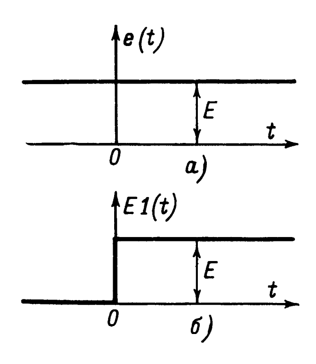


Рис. 8. Графики э. д. с.
а — э. д. с., действующей от $t=-\infty$ до $t=\infty$; *б* — э. д. с. включения.

Найдем переходную характеристику для рассмотренной ранее цепи рис. 6,*б*, полагая, что выходной сигнал (напряжение) снимается с резистора R. Выходной сигнал очевидно равен $u_R(t)=Ri(t)$. Ток в цепи при подключении ее в момент $t=0$ к источнику постоянной э. д. с. E, т. е. при воздействии на цепь э. д. с. включения (рис. 8,*б*), вычислен и выражен в виде равенства (6). Тогда напряжение на резисторе $u_R(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Полагая в этом уравнении $E=1$, получим выражение переходной характеристики

$$h(t)=1-e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{11}$$

В данном случае переходная характеристика является безразмерной величиной.

Переходная и частотная характеристики электрической цепи взаимно связаны. Остановимся на этом несколько подробнее и рассмотрим качественно эту зависимость. Как известно, для прохождения без искажения сигнала любой формы через электрическую цепь необходимо, чтобы модуль коэффициента передачи цепи $K(\omega)$ не зависел от частоты, т. е. амплитудно-частотная характеристика цепи была равномерной в диапазоне частот ω от 0 до ∞, а фазовый угол $\varphi(\omega)$ коэффициента передачи (фазочастотная характеристика) был линейной функцией частоты. Такие идеальные условия в реальных цепях не выполняются, и поэтому при прохождении через цепь различных сложных сигналов, в том числе сигнала ступенчатой формы, последний в той или иной степени искажается. В частности, на искажение ступенчатого сигнала оказывает влияние «завал» амплитудно-частотной характеристики цепи на низких и высоких частотах. Чем выше частота синусоидального колебания, тем более крутой оказывается синусоидальная кривая в точках ее пересечения с осью абсцисс. Завал амплитудно-частотной характеристики в области высоких частот

свидетельствует о том, что электрическая цепь либо слабо, либо (с определенной частоты) совсем не реагирует на быстропеременные воздействия. Отсюда можно сделать вывод о том, что способность цепи к воспроизведению в своем отклике фронта ступенчатого сигнала должна быть каким-то образом связана с коэффициентом передачи цепи на очень высоких частотах (при $\omega \longrightarrow \infty$). С другой стороны, способность цепи передать без искажения плоскую часть ступенчатого сигнала должна быть связана со свойствами коэффициента передачи на очень низких частотах (при $\omega \longrightarrow 0$). Однако, как мы установили, реакция цепи на воздействие ступенчатого сигнала также определяется ее временной, переходной характеристикой $h(t)$. Следовательно, частотная и переходная характеристики отражают одинаковые физические свойства электрической цепи, но разными способами.

Между амплитудно-частотной $K(\omega)$ и переходной $h(t)$ характеристиками цепи существует однозначная связь, которую можно доказать математически, а именно:

$$K(\infty) = h(0) \text{ при } \omega \longrightarrow \infty.$$

и

$$K(0) = h(\infty) \text{ при } \omega \longrightarrow 0.$$

В приведенных соотношениях символы $h(0)$ и $h(\infty)$ — значения переходной характеристики в моменты времени $t \longrightarrow 0$ и $t \longrightarrow \infty$ соответственно. Таким образом, значение переходной характеристики в начальный момент времени ($t \longrightarrow 0$) определяется значением амплитудно-частотной характеристики при очень высоких частотах ($\omega \longrightarrow \infty$). Наоборот, значение переходной характеристики при больших величинах $t \longrightarrow \infty$ определяется значением амплитудно-частотной характеристики для очень низких частот ($\omega \longrightarrow 0$). Следовательно, по виду переходной характеристики можно оценить, какова должна быть амплитудно-частотная характеристика цепи.

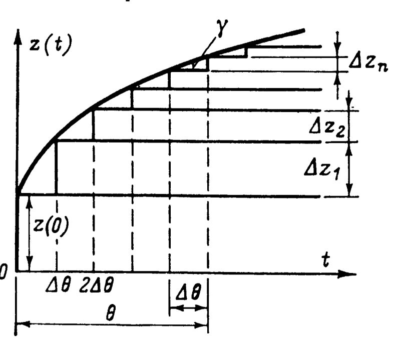


Рис. 9. Аппроксимация воздействующей функции суммой ступенчатых сигналов.

Метод суперпозиции позволяет сравнительно просто найти (при нулевых начальных условиях) реакцию линейной цепи, подвергающейся воздействию внешнего сигнала произвольной формы, если известна переходная характеристика этой цепи. Предположим, что внешнее воздействие на цепь, переходная характеристика которой $h(t)$, задано для $t \geqslant 0$ функцией $z(t)$, графически изображенной на рис. 9. Кривую $z(t)$ можно представить в виде суммы последовательно вводимых друг за другом ступенчатых сигналов. Так, в момент $t=0$ вступает в действие скачок $z(0)$, затем через равные интервалы времени $\Delta\theta$ ступенчатые сигналы Δz. Величина каждой ступеньки такова, что ее вершина касается кривой $z(t)$, и поэтому получившаяся ломаная линия оказывается вписанной в исходную кривую. Вели-

чина любого скачка, например в момент $t=\theta$, может быть найдена с помощью производной в этой точке

$$\Delta z_n \approx \Delta\theta \operatorname{tg} \gamma = \Delta\theta \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\theta}.$$

Образованное таким способом многоступенчатое внешнее воздействие математически представится суммой

$$z_c(t) = z(0)\, 1(t) + \Delta z_1\, 1(t-\Delta\theta) + \Delta z_2\, 1(t-2\Delta\theta) + \ldots =$$
$$= z(0)\, 1(t) + \sum_1^n \Delta z_n\, 1(t-n\Delta\theta).$$

Реакция цепи при внешнем воздействии $z(0)1(t)$ будет равна $z(0)h(t)$, аналогично при воздействии $\Delta z_1 1(t-\Delta\theta)$ возникнет реакция $\Delta z_1 h(t-\Delta\theta)$, воздействию $\Delta z_2 1(t-2\Delta\theta)$ соответствует $\Delta z_2 h(t-2\Delta\theta)$ и т. д. Здесь аргументом переходной характеристики служит время $t-\Delta\theta$, $t-2\Delta\theta$ и т. д., поскольку каждый элементарный ступенчатый сигнал вступает в действие на интервал $n\Delta\theta$ позже момента $t=0$.

На основании принципа суперпозиции можно утверждать, что результирующий выходной сигнал $x_c(t)$ при воздействии $z_c(t)$ равен сумме выходных сигналов, обусловленных действием каждого ступенчатого сигнала, т. е.

$$x_c(t) = z(0)\, h(t) + \Delta z_1 h(t-\Delta\theta) + \Delta z_2 h(t-2\Delta\theta) + \ldots =$$
$$= z(0)\, h(t) + \sum_1^n \Delta z_n h(t-n\Delta\theta).$$

Число членов суммы n равно числу ступенчатых сигналов за исключением начального. Очевидно, что ступенчатая кривая $z_c(t)$ тем точнее будет представлять исходную плавную кривую $z(t)$, чем больше будет число ступенек, т. е. чем меньше будет интервал $\Delta\theta$.

Увеличивая число ступеней до бесконечности и заменяя интервал $\Delta\theta$ на бесконечно малый $d\theta$, при переходе к пределу получим $n\Delta\theta\to\theta$ $\Delta z_n \to \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\theta} d\theta$, $z_c(t)\to z(t)$; сумма $\sum_1^n \Delta z_n h(t-n\Delta\theta)$ перейдет в интеграл $\int_0^t \left(\frac{dz}{dz}\right)_{t=\theta} h(t-\theta)\, d\theta$. Окончательно искомая реакция цепи определится выражением

$$x(t) = z(0)\, h(t) + \int_0^t \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\theta} h(t-\theta)\, d\theta, \tag{12}$$

которое называется **суперпозиционным интегралом** (интегралом Дюамеля) *. В полученной формуле момент времени t, в ко-

---

* В литературе имеются и другие формы записи суперпозиционного интеграла, например [Л. 1].

торый ищется значение интеграла, является хотя и произвольным, но постоянным для процесса суммирования. Переменной интегрирования является время θ. Строго говоря, нижний предел интеграла следовало бы записать как 0_+, поскольку реакция цепи на ступеньку $z(0)$ при $t=0$ учитывается первым слагаемым формулы (12).

Расчет при помощи суперпозиционного интеграла производят в следующем порядке:

а) определяют переходную характеристику исследуемой цепи $h(t)$;

б) находят значение переходной характеристики и воздействующего сигнала в начальный момент времени, для чего в формулу $h(t)$ и в выражение $z(t)$ подставляют значение $t=0$;

в) записывают выражение $h(t-\theta)$, для чего в формуле для $h(t)$ надо t заменить на $t-\theta$;

г) вычисляют $(dz/dt)_{t=\theta}$, для чего находят производную по t функции воздействующего сигнала и в полученном выражении заменяют t на θ;

д) подставляют найденные на этапах а), б), в), г) выражения в формулу (12), производят интегрирование по переменной θ и подставляют в полученное выражение пределы.

Анализ переходных процессов при воздействии импульсных сигналов

Много радиотехнических задач связано с исследованием процессов в электрических цепях, возникающих при воздействии кратковременных внешних сигналов, длительность которых соизмерима с продолжительностью переходных процессов. Такие внешние воздействия и процессы будем называть импульсными. Форма некоторых импульсных сигналов показана на рис. 10.

При воздействии каждого импульсного сигнала длительностью $t_и$ в цепи возникает переходный процесс. По окончании импульса в цепи возникает другой переходный процесс, связанный с рассеиванием энергии, накопленной за время $t_и$ в электрических и магнитных полях конденсаторов и катушек. Если продолжительность этого переходного процесса намного меньше длительности паузы между импульсами, то к моменту прихода следующего импульса токи и напряжения в цепи будут равны нулю. Поэтому переходный процесс можно рассчитывать для каждого импульса в отдельности. Если параметры импульсов не изменяются, то расчет достаточно произвести для одного импульса. Переходный процесс, возникающий в момент начала действия импульса и завершающийся до его окончания, имеет нулевые начальные условия, а процесс, возникающий в момент окончания импульса, — ненулевые.

Для исследования переходных процессов при импульсных воздействиях применимы описанные в предыдущих параграфах методы анализа. Например, процессы в электрической цепи при воздействии на нее импульса напряжения (рис. 10,*а*), который математически описывается выражением

$$z(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_и & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_и; \\ 0 & \text{при } t \geqslant t_и, \end{cases}$$

могут быть проанализированы следующими способами.

Первый способ. Процессы в цепи рассматриваются отдельно для двух промежутков времени: вначале для интервала $0 \leqslant t < t_и$, затем для $t \geqslant t_и$. В интервале $0 \leqslant t < t_и$ расчет производится так же, как и при воздействии на цепь э. д. с. включения величиной $U_и$. Для вычисления искомого напряжения (тока) составляется дифференциаль-

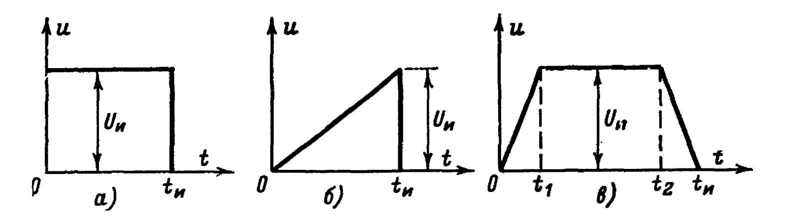


Рис. 10. Формы импульсных сигналов.
а — прямоугольный импульс; *б* — пилообразный (треугольный) импульс; *в* — трапецеидальный импульс.

ное или операторное уравнение (при нулевых начальных условиях), которое решается описанными в предыдущих параграфах методами. Второе уравнение, уже при ненулевых начальных условиях, составляется для промежутка времени $t \geqslant t_и$. Это уравнение будет однородным, так как действующий на цепь сигнал при $t \geqslant t_и$ равен нулю. Решение последнего уравнения дает выражение для напряжения (тока), возникающего в цепи после окончания импульса.

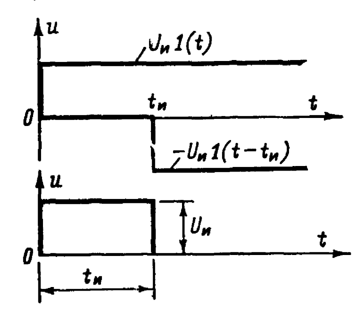


Рис. 11. Представление прямоугольного импульса алгебраической суммой двух ступенчатых функций.

Второй способ. Импульсные сигналы, представленные на рис. 10, могут быть выражены с помощью единичных функций. В частности, прямоугольный импульс напряжения на рис. 10,*а* выражается алгебраической суммой двух ступенчатых функций

$$u(t) = U_и 1(t) - U_и 1(t - t_и),$$

как это графически изображено на рис. 11. Если известна переходная характеристика цепи, то переходный процесс может быть найден методом суперпозиции. Поскольку цепь линейна, то для нахождения искомого выходного сигнала достаточно алгебраически сложить выходные сигналы, вызываемые каждой из составляющих импульса в отдельности

$$x(t) = U_и h(t) 1(t) - U_и h(t - t_и) 1(t - t_и).$$

При воздействии на электрическую цепь импульсных сигналов более сложной формы переходный процесс может быть рассчитан с помощью суперпозиционного интеграла. Найдем, например, напряжение на резисторе R в цепи рис. 6,*б* при воздействии на нее импульса напряжения треугольной формы (рис. 10,*б*). Функция, выражаю-

щая импульс такой формы, математически может быть записана так:

$$z(t)=u(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0;\\ U_и \dfrac{t}{t_и} & \text{при } 0\leqslant t\leqslant t_и;\\ 0 & \text{при } t\geqslant t_и.\end{cases}$$

Воспользуемся формулой (12). Переходная характеристика рассматриваемой цепи была определена выражением (11). Прежде всего определим значение переходной характеристики и воздействующего на цепь сигнала в начальный момент времени: $h(0)=0$ и $u(0)=0$. Затем запишем выражение $h(t-\theta)=1-e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}$. Вычислим производную функции воздействующего сигнала $du/dt=U_и/t_и$, подставим найденные выражения в формулу (12)

$$x(t)=u_R(t)=0+\int_0^t \frac{U_и}{t_и}\left(1-e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}\right)d\theta$$

и интегрируем по переменной θ. После интегрирования и подстановки пределов получим следующее выражение для искомого напряжения:

$$u_R(t)=U_и\left[\frac{t}{t_и}-\frac{\tau}{t_и}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right],$$

которое справедливо для времени $0\leqslant t\leqslant t_и$. Ток в цепи в этом интервале нарастает по такому же закону

$$i(t)=\frac{u_R(t)}{R}=\frac{U_и}{R}\left[\frac{t}{t_и}-\frac{\tau}{t_и}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right].$$

В момент $t=t_и$ действие импульса прекращается. Ток в этот момент достигает величины

$$i(t_и)=I_и=\frac{U_и}{R}\left[1-\frac{\tau}{t_и}\left(1-e^{-\frac{t_и}{\tau}}\right)\right],$$

а если $t_и\geqslant 3\tau$, то

$$I_и\approx\frac{U_и}{R}\left(1-\frac{\tau}{t_и}\right).$$

По окончании действия импульса в цепи возникает новый переходный процесс с ненулевыми начальными условиями, обусловленный тем, что в магнитном поле катушки к моменту $t=t_и$ запасается определенное количество энергии, для рассеяния которой необходимо конечное время (при этом, естественно, подразумевается, что цепь остается замкнутой). Для анализа процесса при $t\geqslant t_и$ можно воспользоваться «классическим» или операторным методом. Воспользуемся последним методом и найдем ток в цепи при $t\geqslant t_и$. На основании второго закона Кирхгофа запишем операторное уравнение

$$U_L(p)+U_R(p)=0.$$

Значение $U_R(p)$ берем из табл. 4, а $U_L(p)$ определяем по формуле (9), учитывая, что $i_L(0)=i(t_и)=I_и$. Тогда

$$RI(p)+pLI(p)-pLI_и=0,$$

откуда

$$I(p)=I_и\frac{p}{p+R/L}.$$

Обращаясь к табл. 3, находим полученное изображение в формуле (3-3), откуда оригинал функции для времени $t\geqslant t_и$ будет:

$$i(t-t_и)=I_и e^{-\frac{t-t_и}{\tau}},$$

где $\tau=1/\alpha=L/R$.

Анализ процессов в цепи при воздействии на нее трапецеидального импульса (рис. 10,*в*) более трудоемок. Расчет производится отдельно для четырех интервалов времени. Вначале определяется реакция цепи в интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, затем в интервалах $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ и $t_2\leqslant t\leqslant t_и$ и, наконец, вычисляется процесс, возникающий в цепи после окончания импульса при $t\geqslant t_и$.

В заключение сравним рассмотренные методы анализа. Анализ цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков, при постоянных или гармонических внешних воздействиях можно проводить «классическим» или операторным методом. Каким из них пользоваться, во многом зависит от подготовки и навыка. «Классический» метод физически нагляден, однако даже при решении уравнений второго порядка оказывается более трудоемким, чем операторный, в связи с необходимостью отыскания постоянных интегрирования из начальных условий. Анализ сложных цепей, описываемых уравнениями третьего и более высокого порядков, обычно проводится операторным методом.

Суперпозиционный метод применяется в тех случаях, когда воздействующий на цепь сигнал изменяется во времени по сложному закону.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ RC

Уравнение последовательной цепи RC

Изучение переходных процессов начнем с цепей, в элементах которых энергия может накапливаться только в одной форме: в электрическом или магнитном поле. Такие цепи представляют собой комбинации резистора и одного реактивного элемента (конденсатора или катушки). В первую очередь рассмотрим цепи RC, являющиеся составной частью большого числа импульсных устройств (генераторов, триггеров, усилителей и т. д.). Поэтому переходные процессы в них представляют значительный практический интерес.

Начнем с простейшей последовательной цепи RC. Не оговаривая пока характер внешнего воздействия, подсоединим незаряженный конденсатор C через резистор R к источнику напряжения $e(t)$. Такая цепь изображена на рис. 12. После перевода выключателя в положение *1* (момент $t=0$) в цепи возникает переходный процесс, поскольку напряжение $u_C(t)$ на конденсаторе может измениться только за ко-

нечное время. В цепях RC обычно рекомендуется вначале найти напряжение на конденсаторе, а затем ток.

Воспользуемся вторым законом Кирхгофа (сумма падений напряжения на резисторе R и конденсаторе C равна внешней э. д. с.) и для $t \geqslant 0$ составим уравнение

$$u_R + u_C = e(t).$$

Выразим напряжение на резисторе $u_R = Ri_R = Ri$ через u_C. Учитывая, что при последовательном соединении R и C ток в любом участке цепи одинаков и равен $i = i_C = C\,du_C/dt$, мы вправе записать

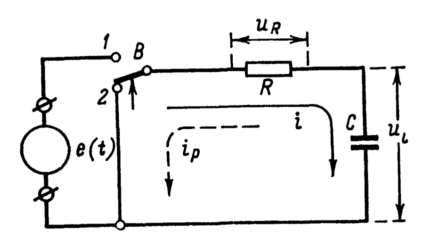


Рис. 12. Схема цепи RC.

$u_R = RC\,du_C/dt$. Подставив значение u_R в исходное уравнение, получим:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t). \qquad (13)$$

Это выражение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, по своей структуре аналогичное уравнению (2), в котором неизвестной функцией является напряжение $u_C(t)$, а величина $\tau = RC$. При использовании «классического» метода решения напряжение $u_C(t)$ следует искать в виде суммы вынужденной $u_{C\text{в}}(t)$ и свободной $u_{C\text{св}}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ составляющих, т. е.

$$u_C(t) = u_{C\text{в}}(t) + Ae^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (14)$$

Ниже рассматриваются переходные процессы в цепях RC при различных внешних воздействиях.

Включение в цепь RC постоянной э. д. с.

Пусть в момент $t = 0$ при переводе выключателя в положение 1 цепь RC подключается к источнику постоянной э. д. с., причем верхний по схеме контакт источника положителен. Воздействие на цепь можно аппроксимировать ступенчатой функцией э. д. с. включения, форма которой изображена на рис. 8,*б*. В момент скачка входного напряжения сопротивление конденсатора равно нулю, так как согласно второму закону коммутации напряжение на нем мгновенно измениться не может, поэтому в начальный момент напряжение источника целиком оказывается приложенным к резистору. Затем конденсатор начинает заряжаться, на его обкладках накапливается заряд и напряжение между ними постепенно возрастает. По-

скольку для любого момента справедливо уравнение $u_R+u_C=E$, то при увеличении напряжения u_C падение напряжения на резисторе, а следовательно, и ток в цепи уменьшаются. Наконец, u_C становится равным э. д. с. источника E и процесс заряда конденсатора заканчивается, ток в цепи становится равным нулю.

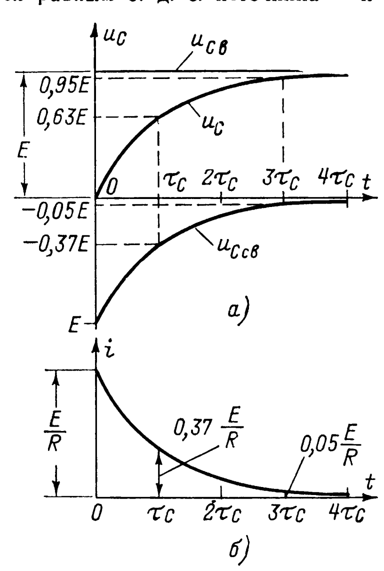


Рис. 13. Кривые изменения напряжения на конденсаторе (*а*) и тока (*б*) в цепи RC при включении постоянной э. д. с. (заряд конденсатора).

Рассмотрим математические зависимости. При $e(t)=E$ уравнение (13) можно переписать в виде

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E. \qquad (15)$$

Вынужденная составляющая напряжения, очевидно, равна $u_{Cв}=E$, поскольку в установившемся режиме конденсатор заряжается до э. д. с. внешнего источника. Тогда согласно выражению (14) имеем:

$$u_C=E+Ae^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (16)$$

Чтобы определить постоянную A, воспользуемся начальными условиями, состоящими в том, что к моменту коммутации конденсатор был разряжен, т. е. $u_C(0_-)=0$. Из выражения (16) для момента $t=0$ имеем $u_C(0)=E+A$. С другой стороны, согласно второму закону коммутации напряжение $u_C(0_-)=u_C(0_+)=u_C(0)=0$. Из этих двух соотношений находим $A=-E$.

Таким образом, свободная составляющая напряжения на конденсаторе равна $u_{Cсв}=-Ee^{-\frac{t}{RC}}$, а полное напряжение на конденсаторе в процессе его заряда изменяется во времени согласно выражению

$$u_C=E-Ee^{-\frac{t}{RC}}=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (17)$$

по экспоненциальному закону, стремясь к величине E.

На рис. 13,*а* приведены графики полного напряжения на конденсаторе, а также вынужденной и свободной составляющих. Обратим внимание, что в момент $t=0$ сумма напряжений $u_{Cв}(0)+u_{Cсв}(0)=0$, чем обеспечивается выполнение начальных условий.

При значениях $t/RC\leqslant 0{,}3$, т. е. на начальном этапе переходного процесса, функция $e^{-\frac{t}{RC}}$ с удовлетворительной для практиче-

ских целей точностью может быть аппроксимирована рядом разложения (1). Тогда для напряжения u_C получим выражение

$$u_C \approx E \frac{t}{RC},$$

из которого следует, что нарастание напряжения на конденсаторе в начале процесса происходит по линейному закону. Такой способ получения линейно изменяющегося напряжения используется в простейших генераторах пилообразного напряжения [Л. 5].

Ток в цепи (ток заряда конденсатора) может быть найден дифференцированием выражения для u_C. Он, очевидно, должен содержать только свободную составляющую, так как в установившемся режиме ток в цепи равен нулю. Действительно,

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{18}$$

Падение напряжения на резисторе

$$u_R = iR = Ee^{-\frac{t}{RC}}. \tag{19}$$

Ток в цепи и напряжение на резисторе с течением времени убывают по одинаковому экспоненциальному закону. Этот ток максимален в начальный момент, причем его начальная величина ограничивается только сопротивлением резистора R. График кривой тока показан на рис. 13,*б*.

Заметим, что в момент включения ток конденсатора изменяется скачком от нуля до максимального значения; это физически возможно, так как скачок тока в цепи не приводит к скачкообразному изменению запаса энергии в электрическом поле конденсатора.

Произведение RC для данной цепи постоянно (поскольку R и C не изменяются). Это произведение обозначается буквой

$$\tau_C = RC$$

и называется постоянной времени цепи RC. Размерность постоянной времени — секунда

$$[\tau_C] = [R][C] = [\text{Ом}][\Phi] = \left[\frac{\text{В}}{\text{А}}\right]\left[\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}}\right] = [\text{с}].$$

Длительность переходного процесса зависит от постоянной времени. Действительно, чем больше сопротивление резистора R, тем медленнее заряжается конденсатор, а чем больше емкость конденсатора C, тем больший заряд надо накопить на пластинах для получения напряжения E. Таким образом, чем больше постоянная времени цепи, тем больше продолжительность переходного процесса. Следовательно, величина τ_C позволяет сравнивать между собой различные цепи RC в отношении времени установления стационарного режима. Это иллюстрируется кривыми рис. 14, показывающими изменение напряжения на конденсаторе в цепях с различными постоянными времени $\tau_{C2} > \tau_{C1}$. Физически постоянная времени представляет время, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения в цепи уменьшаются в e раз.

По истечении времени $t_{уст}=3\tau_C$, которое называется временем установления, переходный процесс принято считать закончившимся, напряжение на конденсаторе становится равным $0{,}95E$, а ток в цепи уменьшается до 0,05 начального значения (рис. 13). Например, заряд конденсатора емкостью 50 мкФ через резистор с сопротивлением 1 кОм практически заканчивается через $3RC=3\cdot1000\cdot50\cdot10^{-6}=0{,}15$ с.

Чтобы получить представление о скорости нарастания напряжения du_C/dt на конденсаторе, найдем из уравнения (15) производную

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{E-u_C}{RC}.$$

Величина du_C/dt обратно пропорциональна постоянной времени цепи. Скорость нарастания напряжения уменьшается по мере того,

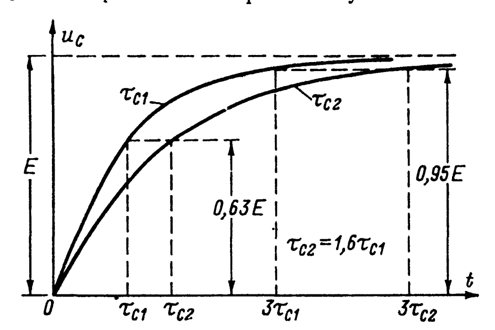


Рис. 14. Кривые изменения напряжения на конденсаторе в цепях RC с различными постоянными времени.

как само напряжение увеличивается, т. е. по мере заряда конденсатора, а в начальный момент, когда $u_C(0)=0$, имеет максимальное значение

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{\text{макс}}=\frac{E}{RC}.$$

Такие выводы не являются неожиданными и вытекают из свойств экспоненциальной функции, которая в данном случае определяет закон нарастания напряжения на конденсаторе.

Во время переходного процесса в электрическом поле конденсатора происходит непрерывное накопление энергии, которая в установившемся режиме ($t\longrightarrow\infty$) равна $W_C=CE^2/2$. Одновременно часть энергии, отдаваемой источником, выделяется в виде тепла в резисторе. Эта энергия может быть вычислена по формуле

$$W_R=\int_0^\infty i^2R\,dt=\frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau_C}}\,dt=\frac{CE^2}{2}.$$

Интересно отметить, что энергия W_R, теряемая в резисторе, не зависит от его сопротивления и равна энергии, запасаемой в электри-

ческом поле конденсатора. Таким образом, к. п. д. процесса заряда конденсатора от источника постоянного напряжения равен 50%.

Вычислим теперь напряжение на конденсаторе операторным методом. Запишем для цепи рис. 12 для времени $t \geqslant 0$ операторное уравнение по второму закону Кирхгофа

$$U_R(p) + U_C(p) = E(p).$$

Изображением постоянной величины является сама постоянная, т. е. $E(p) \doteq E$. Изображение тока в цепи обозначим $I(p) \doteq i(t)$ и, используя формулы табл. 4, выразим $U_R(p)$ через напряжение $U_C(p)$

$$U_R(p) = RI(p) = pRCU_C(p),$$

тогда

$$pRCU_C(p) + U_C(p) = E.$$

Вместо дифференциального уравнения (15) получилось обычное алгебраическое уравнение, из которого находим изображение искомого напряжения

$$U_C(p) = E\frac{1}{pRC+1} = E\frac{1/RC}{p+1/RC}.$$

Обращаясь к табл. 3, находим такое изображение в формуле (3-4) и записываем оригинал (функцию времени) искомого напряжения

$$u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Короткое замыкание цепи RC

Если в цепи рис. 12, подключенной к источнику постоянной э. д. с. и находящейся в стационарном режиме (ток равен нулю, а конденсатор заряжен до напряжения E), в момент $t=0$ перевести переключатель B в положение 2, то конденсатор окажется замкнутым на резистор и в цепи возникнет ток, который будет поддерживаться за счет запаса энергии, накопленной в электрическом поле конденсатора. С течением времени энергия электрического поля рассеивается, превращаясь в тепло в резисторе, ток разряда уменьшается и в конце концов становится равным нулю. Это задача с ненулевыми начальными условиями. Полагая в выражении (13) величину $e(t)=0$, получим однородное дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Внешнее воздействие в цепи отсутствует, поэтому искомое решение для напряжения u_C согласно равенству (5) будет иметь только свободную составляющую

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Для определения постоянной A воспользуемся начальными условиями. Из последнего уравнения при $t=0$ имеем $u_C(0)=A$. Кроме

того, согласно второму закону коммутации $u_C(0_-)=u_C(0_+)=u_C(0)=E$, так как конденсатор к моменту коммутации был заряжен до напряжения E. Следовательно, $A=E$ и напряжение на конденсаторе изменяется согласно уравнению

$$u_C = Ee^{-\frac{t}{\tau_C}} \qquad (20)$$

по экспоненциальному закону.

Величина разрядного тока

$$i_р = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau_C}}. \qquad (21)$$

Падение напряжения на резисторе

$$u_R = i_р R = -Ee^{-\frac{t}{\tau_C}}. \qquad (22)$$

Отрицательный знак в выражении для $i_р$ указывает на то, что направление разрядного тока противоположно направлению зарядного тока, условно принятому за положительное (см. рис. 12). Максимальная величина разрядного тока E/R ограничивается лишь активным сопротивлением цепи. Если сравнить выражение для разрядного и зарядного токов (последнее было найдено в предыдущем параграфе), то можно заключить, что оба тока в цепи изменяются одинаково, но имеют противоположные направления

Продолжительность переходного процесса, как обычно, определяется постоянной времени $\tau_C=RC$. Действительно, чем больше емкость конденсатора и сопротивление резистора, тем соответственно больше накопленный заряд на пластинах и меньше разрядный ток и тем медленнее разряжается конденсатор.

С энергетической точки зрения процесс короткого замыкания цепи RC характеризуется тем, что энергия, которая до коммутации была запасена в электрическом поле конденсатора, целиком превращается в тепло в резисторе.

Если заряженный конденсатор отключить от цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Например, конденсатор емкостью $C=200$ мкФ с сопротивлением утечки $R_C=10$ МОм имеет постоянную времени $\tau_C=10\cdot10^6\cdot200\cdot10^{-6}=2\cdot10^3$ с $\approx$ ≈ 32 мин, т. е. на конденсаторе примерно через 30 мин после его отключения сохранится более одной трети первоначального напряжения.

К исследованию переходных процессов, связанных с зарядом конденсатора через сопротивление от источника постоянного напряжения и последующим его разрядом, сводятся многие важные практические задачи, возникающие при анализе работы различных импульсных устройств. Рассмотрим, например, работу цепи RC в генераторе пилообразного напряжения на неоновой лампе (рис. 15,*а*). После включения генератора напряжение на конденсаторе, а следовательно, и на лампе скачком измениться не может и в момент непосредственно после включения остается равным нулю. Затем при погашенной лампе конденсатор начинает заряжаться через резистор R. Напряжение на конденсаторе нарастает по экспоненциальному закону, пока не достигнет напряжения зажигания $U_{заж}$ лампы. В этот момент лампа

загорается и конденсатор относительно быстро разряжается до некоторого напряжения, равного потенциалу гашения лампы $U_{\text{гаш}}$. Как только напряжение на разряжающемся конденсаторе (и на лампе) достигнет значения $U_{\text{гаш}}$, лампа гаснет, конденсатор начинает вновь заряжаться, цикл заряд — разряд повторяется. Поскольку зарядное сопротивление R выбирается во много раз больше внутреннего сопротивления горящей лампы, то и постоянная времени зарядной цепи

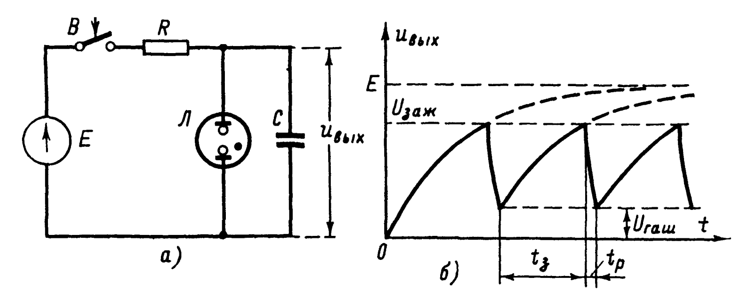


Рис. 15. Схема генератора пилообразного напряжения на неоновой лампе (*а*) и форма напряжения на конденсаторе (*б*).

получается во столько же раз больше постоянной времени цепи разряда. Следовательно, продолжительность заряда $t_з$ значительно превышает длительность разряда $t_р$. Форма напряжения на конденсаторе показана на рис. 15,*б*.

Рассмотренный генератор представляет собой пример устройства, в котором переходный режим является нормальным рабочим режимом.

Включение в цепь RC гармонической (синусоидальной) э. д. с.

Пусть внешнее воздействие на цепь RC при $t \geqslant 0$ будет гармоническим и выражается синусоидальной функцией

$$e(t) = U_m \sin(\omega t + \psi), \tag{23}$$

где U_m — амплитуда; ω — частота; ψ — начальная фаза колебаний.

Исходное уравнение (13) в этом случае приобретает следующий вид:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Воспользуемся «классическим» методом анализа. Попутно отметим, что формулу (8) здесь применить нельзя, так как на цепь воздействует переменное напряжение. Величина вынужденной составляющей напряжения на конденсаторе, равно как и вынужденной составляющей тока в цепи, очевидно совпадает со своим установившимся значением. Поэтому для определения $u_{Cв}$ и $i_в$ воспользуемся законом Ома для цепи переменного тока. Вначале найдем вынужден-

ный ток (ток в цепи в стационарном режиме)

$$i_в = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ — модуль полного сопротивления цепи;

$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR}$ — фазовый сдвиг между током в цепи и приложенной э. д. с.

Вынужденная составляющая напряжения равна:

$$u_{Cв} = \frac{U_m}{z\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Слагаемое фазы — $\pi/2$ учитывает, что напряжение на конденсаторе в установившемся режиме отстает по фазе от тока в цепи на $\pi/2$. Поскольку $\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t + \psi - \varphi)$, то выражение для $u_{Cв}$ можно записать в виде

$$u_{Cв} = -\frac{U_m}{z\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi).$$

Подставив это значение в уравнение (14), получим:

$$u_C = -\frac{U_m}{z\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Из начальных условий найдем постоянную A. Напряжение на конденсаторе при $t=0$ равно.

$$u_C(0) = -\frac{U_m}{z\omega C} \cos(\psi - \varphi) + A.$$

С другой стороны, по второму закону коммутации $u_C(0)=0$, так как конденсатор до коммутации был не заряжен. Использовав оба условия, найдем:

$$A = \frac{U_m}{z\omega C} \cos(\psi - \varphi).$$

Следовательно, свободная составляющая напряжения на конденсаторе равна:

$$u_{Cсв} = \frac{U_m}{z\omega C} \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Тогда полное напряжение на конденсаторе во время переходного процесса будет равно:

$$u_C = -\frac{U_m}{z\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{U_m}{z\omega C} \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

Начальные значения (при $t=0$) вынужденной и свободной составляющих напряжения u_C равны и противоположны по знаку; они зависят от соотношения между ψ и φ и максимальны при $\psi - \varphi = 0$.

На рис. 16 изображены кривые, иллюстрирующие характер изменения напряжения u_C и его составляющих $u_{Cв}$ и $u_{Cсв}$ для случая, когда $\psi-\varphi=0$. Как видно из графика, напряжение на конденсаторе в начальной стадии переходного процесса может почти в 2 раза превысить амплитуду колебаний установившегося режима.

Интересно отметить, что если включение происходит в момент, когда $\psi-\varphi=\pm\pi/2$, то в цепи сразу устанавливается стационарный режим: $\cos(\pm\pi/2)=0$ и свободная составляющая напряжения на

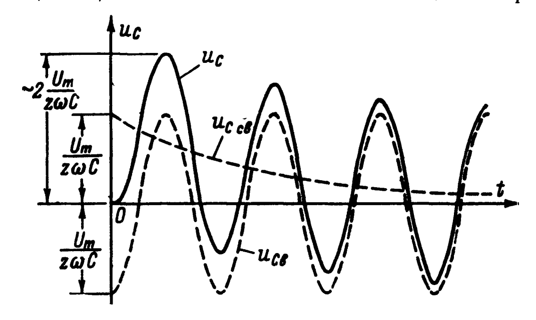


Рис. 16. График напряжения на конденсаторе при включении в цепь RC гармонической э. д. с.

конденсаторе не возникает. Это происходит потому, что вынужденное напряжение при $\psi-\varphi=\pi/2$ в момент $t=0$ также равно нулю

$$u_{Cв}(0) = -\frac{U_m}{z\omega C}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

и начальные условия для напряжения на конденсаторе выполняются без свободной составляющей напряжения.

Величину тока в цепи в переходном режиме проще всего найти по формуле $i=C du_C/dt$.

Опустив промежуточные преобразования, напишем окончательное выражение для тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \operatorname{tg}\varphi \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

где $I_m=U_m/z$ — амплитуда тока в цепи в установившемся режиме. Первое слагаемое представляет собой вынужденную, второе — свободную составляющую тока в цепи. Множитель $\operatorname{tg}\varphi$, входящий во второе слагаемое, показывает, что свободная составляющая тока в начальный момент может достигать большой величины. Действительно, при подключении к низкочастотному источнику напряжения цепи RC с небольшим сопротивлением в ней при определенных условиях возникают сверхтоки. Проиллюстрируем это примером. Пусть цепь, у которой $R=100$ Ом, $C=0{,}01$ мкФ, подключается к источнику с напряжением $U=220$ В и частотой 50 Гц. Амплитуда установившегося тока в такой цепи определяется в основном емкостным сопротивлением $x_C=1/\omega C$ конденсатора и составляет всего $I_m \approx \sqrt{2}U/x_C = 1{,}41 \cdot 220 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^{-8} \approx 1$ мА. Величина $\operatorname{tg}\varphi = 1/\omega CR \approx 3200$.

Если включение происходит в момент, когда $\psi-\varphi \approx 0$, то $\cos(\psi-\varphi) \approx 1$, откуда следует, что в первоначальный момент после включения в цепи возникает свободная составляющая тока, максимальная величина которой почти в 3000 раз превышает амплитуду тока установившегося режима.

Подключение параллельной цепи RC к генератору тока

Определим характер изменения напряжения u на параллельно соединенных элементах RC (рис. 17,a), на которые воздействует ток ступенчатой формы $z(t)=I1(t)$. Подобная задача возникает, например, при анализе резистивных усилительных каскадов. В этом случае R является анодной нагрузкой лампы, C представляет собой сумму паразитных емкостей между анодом и катодом лампы,

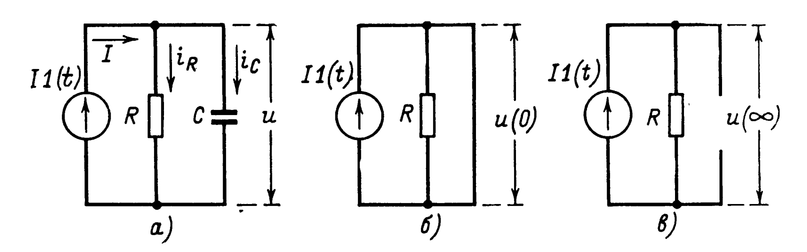


Рис. 17. Воздействие на цепь RC генератора тока.

а — схема цепи: *б* — эквивалентная схема для момента времени $t=0$; *в* — то же для $t=\infty$.

а ток I — анодный ток лампы при воздействии на сетку перепада напряжения $U_{\text{вх}}$ (ток $I=I_{\text{а}}=SU_{\text{вх}}$, где S — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы). Поскольку при $t \geqslant 0$ цепь подвергается постоянному во времени воздействию, то используем формулу (8), для которой начальное значение напряжения $u(0)=0$ находится из эквивалентной схемы рис. 17,$б$, а установившееся напряжение $u(\infty)=$ $=IR$ — из эквивалентной схемы рис. 17,$в$. Постоянная времени $\tau_C=$ $=RC$. Тогда искомое напряжение

$$u=IR+(0-IR)\,e^{-\frac{t}{\tau_C}}=IR\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right).$$

Ток через резистор

$$i_R=\frac{u}{R}=I\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right),$$

а ток через конденсатор

$$i_C=C\,\frac{du}{dt}=Ie^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Полученные решения показывают, что напряжение u в первый момент равно нулю, а воздействующий ток целиком замыкается через

емкость. В последующем напряжение на конденсаторе и ток через резистор возрастают по экспоненциальному закону, а ток через конденсатор убывает, стремясь к нулю при $t \to \infty$; в каждый момент времени $i_R + i_C = I$.

Заметим, что искажения усилителем формы выходного сигнала будут тем меньше, чем меньше постоянная времени цепи $\tau_C = RC$.

Переходные процессы в цепях RC с ненулевыми начальными условиями

Подключение предварительно заряженного конденсатора к источнику постоянного напряжения. Рассмотрим процессы в цепи рис. 18,*а*, в которой конденсатор заряжен до напряжения $u_C(0) = U_0 < E$. Полярность этого напряжения $u_C(0) > 0$ обозначена на схеме. В момент $t = 0$ конденсатор подключается к источнику по-

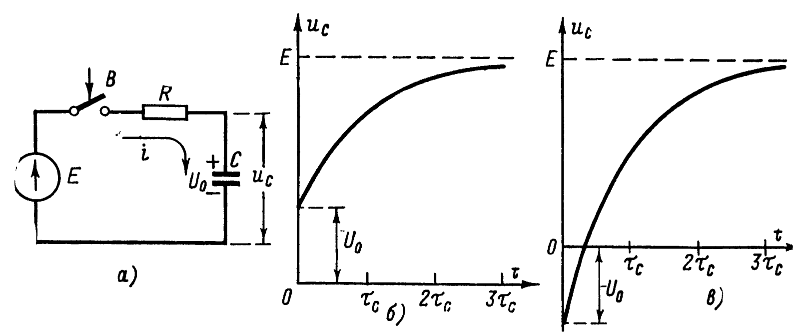


Рис. 18. Подключение заряженного конденсатора к источнику постоянной э. д. с.

а — схема; *б* — график напряжения на конденсаторе при $U_0 > 0$; *в* — график напряжения при $U_0 < 0$.

стоянной э. д. с. E. После коммутации конденсатор доваряжается до напряжения E и установившееся напряжение на нем, очевидно, будет $u_C(\infty) = E$. По формуле (8) сразу найдем напряжение u_C в переходном режиме ($\tau_C = RC$)

$$u_C = E + (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

График напряжения изображен на рис. 18,*б*.

В случае, если начальное напряжение на конденсаторе имеет другую полярность $u_C(0) < 0$, конденсатор перезаряжается от начального отрицательного напряжения до величины E (рис. 18,*в*). Такой режим работ цепи RC имеет место, например, в триггерах, мультивибраторах и других импульсных устройствах.

Подключение резистора параллельно конденсатору. Пусть в цепи, схема которой изображена на рис. 19,*а*, происходит замыкание выключателя, в результате чего параллельно заряженному до напряжения $u_C(0) = E$ конденсатору подключается резистор R_2. Найдем напряжение на конденсаторе при $t \geqslant 0$. Установившаяся величи-

на напряжения на конденсаторе легко находится непосредственно из схемы цепи $u_C(\infty)=ER_2/(R_1+R_2)$, а постоянную времени цепи после ее коммутации можно определить из эквивалентной схемы рис. 19,*б*, где $\tau'_C=CR_1R_2/(R_1+R_2)$. Тогда искомое напряжение согласно уравнению (8) будет:

$$u_C=E\frac{R_2}{R_1+R_2}+\left(E-E\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau'_C}};$$

после простых преобразований получим:

$$u_C=E\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau'_C}}\right).$$

График напряжения на конденсаторе показан на рис. **19,*в*** (кривая *1*).

Отключение шунтирующего резистора от конденсатора. Рассмотрим переходный процесс в цепи рис. 19,*а*, находящейся в стационарном режиме при замкнутом выключателе *В*, если в момент $t=0$

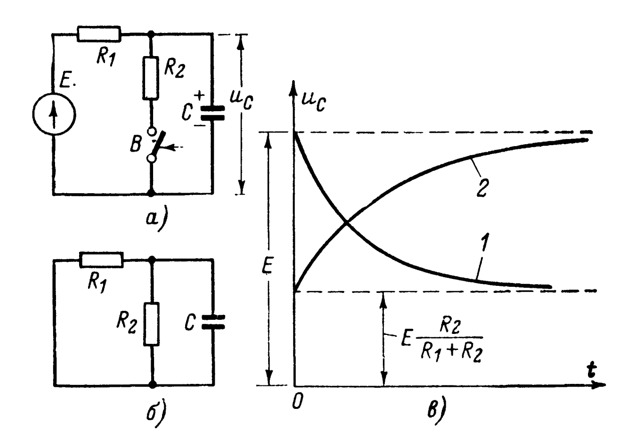


Рис. 19. Изменение активного сопротивления в цепи *RC*.

а — схема; *б* — эквивалентная схема для определения τ'_C; *в* — графики напряжения на конденсаторе.

происходит его размыкание. Начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)=ER_2/(R_1+R_2)$, а новое установившееся значение этого напряжения $u_C(\infty)=E$. Постоянная времени цепи после размыкания выключателя $\tau''_C=R_1C$. Таким образом, напряжение на конденсаторе согласно формуле (8) будет:

$$u_C=E+\left(E\frac{R_2}{R_1+R_2}-E\right)e^{-\frac{t}{\tau''_C}};$$

после несложных преобразований можно записать:

$$u_C = E\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau''_C}}\right).$$

График напряжения приведен на рис. 19,*в* (кривая *2*).

Установление напряжения при размыкании выключателя происходит медленнее, чем при его замыкании, так как постоянная времени во втором случае получается больше $R_1C > R_1R_2C/(R_1 + R_2)$.

Короткое замыкание части цепи. Пусть в цепи рис. 20, подключенной к источнику постоянной э. д. с. и находящейся в установившемся режиме, замыкается выключатель, закорачивающий элементы R_2 и C_2. Из рассмотрения схемы видно, что после коммутации конденсатор C_1 дозаряжается до напряжения источника, а конденсатор C_2 разряжается до нуля.

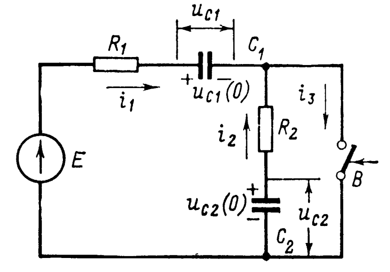


Рис. 20. Короткое замыкание части цепи *RC*.

Найдем напряжение на конденсаторах и токи в цепи i_1, i_2 и i_3, направления которых, условно принятые за положительные, показаны на рис. 20. Чтобы найти напряжение u_{C1} и u_{C2}, воспользуемся формулой (8). Напряжения на конденсаторах к моменту коммутации обратно пропорциональны емкостям конденсаторов, т. е. $u_{C1}(0_-)/u_{C2}(0_-) = C_2/C_1$ и в сумме равны э. д. с. источника: $u_{C1}(0_-) + u_{C2}(0_-) = E$. Из этих двух равенств определяем начальные напряжения на конденсаторах $u_{C1}(0_-) = u_{C1}(0) = EC_2/(C_1 + C_2)$ и $u_{C2}(0_-) = u_{C2}(0) = EC_1/(C_1 + C_2)$. Напряжения на конденсаторах в новом установившемся режиме после коммутации очевидно будут $u_{C1}(\infty) = E$ и $u_{C2}(\infty) = 0$. Постоянная времени, определяющая процесс заряда конденсатора C_1, равна $\tau_{C1} = R_1C_1$, а постоянная времени цепи разряда конденсатора C_2 будет $\tau_{C2} = R_2C_2$. Подставив найденные значения в формулу (8), получим напряжение на конденсаторе C_1

$$u_{C1} = E + \left(E\frac{C_2}{C_1 + C_2} - E\right) e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}} =$$

$$= E\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}\right)$$

и на конденсаторе C_2

$$u_{C2} = 0 + \left(E\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 0\right) e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}} = E\frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}.$$

Ток i_1 найдем, вычислив производную

$$i_1 = C_1\frac{du_{C1}}{dt} = \frac{E}{R_1}\frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C_1}}};$$

аналогично определяем ток i_2:

$$i_2 = -C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = \frac{E}{R_2} \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C_2}}}$$

(знак минус перед производной указывает на то, что конденсатор C_2 разряжается). Ток, протекающий через контакты выключателя, равен сумме токов i_1 и i_2, т. е.

$$i_3 = i_1 + i_2 = E \frac{C_1}{C_1 + C_2} \left(\frac{1}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}} + \frac{1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}} \right).$$

Из полученных выражений видно, что токи положительны, следовательно, направления токов на схеме выбраны правильно.

Подключение цепи RC к заряженному конденсатору (рис. 21,*а*). Конденсатор C_1 заряжен до напряжения U_0 и в момент $t=0$ подключается через резистор R к незаряженному конденсатору C_2. Определим закон изменения напряжений на конденсаторах.

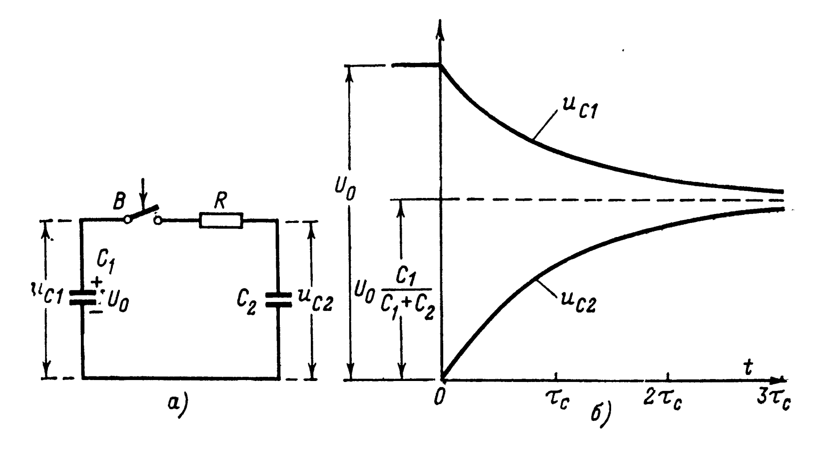


Рис. 21. Включение заряженного конденсатора в цепь RC.
а — схема цепи; *б* — графики напряжений на конденсаторах.

После замыкания выключателя в цепи возникнет ток и конденсатор C_2 начнет заряжаться за счет энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора C_1, который будет разряжаться. По окончании процесса наступит установившийся режим, ток станет равным нулю, а напряжения на конденсаторах сравняются.

Для определения напряжений u_{C1} и u_{C2} можно воспользоваться формулой (8). Постоянная времени цепи $\tau_C = RC_1C_2/(C_1+C_2)$, так как конденсаторы соединены последовательно. Начальное напряжение на заряженном конденсаторе C_1 равно $u_{C1}(0) = U_0$, а на C_2 согласно второму закону коммутации $u_{C2}(0) = 0$. Установившиеся напряжения на C_1 и C_2, которые обозначим $u_{C1}(\infty)$ и $u_{C2}(\infty)$ соответственно и которые, очевидно, равны между собой $u_{C1}(\infty) = u_{C2}(\infty) = u_C(\infty)$, найдем, исходя из условия сохранения суммарного заряда в цепи.

Начальный заряд на конденсаторе C_1 обозначим $q_1(0)=C_1U_0$, а заряд, который будет иметь конденсатор после окончания переходного процесса — $q_1(\infty)=C_1u_C(\infty)$; аналогично для конденсатора C_2 имеем $q_2(0)=0$ и $q_2(\infty)=C_2u_C(\infty)$. Поскольку при коммутации сумма зарядов обоих конденсаторов должна остаться неизменной, то

$$q_1(0)+q_2(0)=q_1(\infty)+q_2(\infty)$$

или

$$C_1U_0+0=C_1u_C(\infty)+C_2u_C(\infty).$$

Из этого равенства находим:

$$u_C(\infty)=U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}.$$

Теперь по формуле (8) можно определить напряжение на конденсаторе C_1

$$u_{C1}=U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}+\left(U_0-U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

и на конденсаторе C_2

$$u_{C2}=U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}+\left(0-U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Эти выражения после простых преобразований перепишем в виде

$$u_{C1}=U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}\left(1+\frac{C_2}{C_1}e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right),$$

а

$$u_{C2}=U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right).$$

Графики напряжений изображены на рис. 21,*б*.

Интересно отметить, что энергия W_{C1+C2}, накапливаемая в электрических полях обоих конденсаторов после коммутации, меньше энергии W_{C1}, которая первоначально была запасена в электрическом поле конденсатора C_1. Действительно, до коммутации была накоплена энергия $W_{C1}={}^1/_2C_1U^2_0$, а после коммутации запас энергии стал

$$W_{C1+C2}=\frac{1}{2}(C_1+C_2)\left(U_0\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{(C_1U_0)^2}{C_1+C_2}.$$

Вычислив отношение этих энергий, убедимся, что

$$\frac{W_{C1+C2}}{W_{C1}}=\frac{C_1}{C_1+C_2}<1.$$

Уменьшение запаса энергии объясняется необратимыми потерями в резисторе R во время переходного процесса. Энергию, рассеиваемую в резисторе, можно найти как разность между количеством энергии, запасенной в электрических полях конденсаторов до и после

коммутации $W_R = W_{C1} - W_{C1+C2}$. Подставив соответствующие значения, получим:

$$W_R = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0^2.$$

Любопытно отметить, что W_R не зависит от сопротивления резистора R.

Увеличение емкости цепи. Обратимся к цепи на рис. 22, в которой на выходе источника постоянного напряжения E включен Г-образный фильтр R_1C_1. В момент $t=0$ параллельно конденсатору C_1 подключается незаряженный конденсатор C_2. Найдем напряжение u_C на конденсаторах.

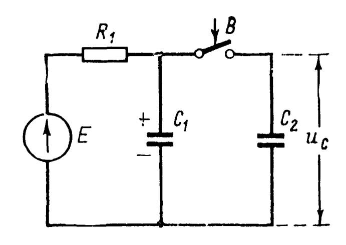


Рис. 22. Увеличение емкости в цепи RC.

Воспользуемся формулой (8), для которой, очевидно, $u_C(\infty) = E$ (в установившемся режиме напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 будут одинаковы и равны э. д. с. источника E), а постоянная времени $\tau_C = R(C_1 + C_2)$, так как конденсаторы соединяются параллельно.

Определение начального напряжения $u_C(0)$ сопряжено с некоторыми трудностями, поскольку нельзя воспользоваться законом постоянства напряжения на конденсаторах в моменты времени $t(0_-)$ и $t(0_+)$. Действительно, в момент $t(0_-)$ непосредственно перед коммутацией напряжение на конденсаторе C_1 было $u_{C1}(0_-) = E$, а на C_2 напряжение $u_{C2}(0_-) = 0$, так как этот конденсатор был разряжен. С другой стороны, в момент времени $t(0_+)$ сразу же после коммутации напряжения на конденсаторах будут одинаковыми $u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = u_C(0_+)$.

Для определения начального напряжения $u_C(0_+)$ воспользуемся, как и в предыдущем примере, правилом сохранения суммарного заряда в цепи. Сумма зарядов $q_1(0_+)$ и $q_2(0_+)$ на конденсаторах C_1 и C_2 в момент $t(0_+)$ должна оставаться равной сумме зарядов $q_1(0_-)$ и $q_2(0_-)$, которые имелись на этих конденсаторах в момент $t(0_-)$, т. е.

$$q_1(0_-) + q_2(0_-) = q_1(0_+) + q_2(0_+).$$

Подставив значение зарядов, получим уравнение

$$C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) = C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+)$$

или

$$C_1 E + 0 = C_1 u_C(0_+) + C_2 u_C(0_+),$$

откуда находим:

$$u_C(0_+) = E \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Таким образом, согласно формуле (8) напряжение u_C может быть представлено выражением

$$u_C = E + \left(E \frac{C_1}{C_1 + C_2} - E\right) e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

которое легко привести к виду

$$u_C = E\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right).$$

Реальный процесс коммутации происходит за конечный, но весьма малый промежуток времени Δt. Если учесть сопротивление сходящихся контактов выключателя, то можно показать, что в интервале Δt второй закон коммутации для напряжений на конденсаторах остается справедливым.

Воздействие на цепь RC импульсного сигнала

Пусть воздействующий на цепь RC сигнал (рис. 23,*а*) представляет собой прямоугольный импульс напряжения (рис. 23,*б*), который математически можно записать следующим соотношением:

$$z(t) = u_{\text{вх}} = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_1; \\ U_{\text{и}} \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2; \\ 0 \text{ при } t \geqslant t_2. \end{cases}$$

Выходной сигнал (напряжение) будем снимать с резистора R (рис. 23,*а*)

При импульсном воздействии реакцию цепи можно определить различными способами. Мы рассмотрим процессы отдельно для двух промежутков времени: вначале для $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а затем для $t \geqslant t_2$. В интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ цепь подвергается воздействию ступенчатого напряжения, поэтому ток в цепи, напряжения на резисторе и конденсаторе изменяются по таким же законам, как и при воздействии на цепь RC э. д. с. включения (см. стр. 37). Если для упрощения условно принять, что начало импульса совпадает с моментом $t = t_1 = 0$, то напряжение на конденсаторе, ток в цепи и падение напряжения на резисторе будут определяться соответственно выражениями (17), (18), (19), в которых в этом случае величину E надо заменить на $U_{\text{и}}$. Однако, как будет ясно из дальнейшего, форма выходного напряжения существенно зависит от соотношения между постоянной времени цепи и длительностью импульса $t_{\text{и}} = t_2 - t_1$.

Пусть постоянная времени τ_C значительно (в 20—30 раз) превышает длительность импульса, т. е. $\tau_C \gg t_{\text{и}}$. При таких параметрах цепи конденсатор за время действия импульса, как это следует из выражения (17), почти не заряжается [например, при $\tau_C / t_{\text{и}} = 20$ напряжение на конденсаторе к концу импульса $u_C(t_{\text{и}}) \approx 0{,}05 U_{\text{и}}$]. Напряжение на выходе цепи (падение напряжения на резисторе) в соответствии со вторым законом Кирхгофа $u_{\text{вых}} = u_R = U_{\text{и}} - u_C \approx U_{\text{и}}$ практически повторяет по форме и по амплитуде импульс на входе (рис. 23,*б*). В течение действия импульса в электрическом поле конденсатора накапливается незначительное количество энергии, и поэтому после окончания действия импульса (при $t > t_2$) в цепи практически не возникает переходный процесс. Такая цепь RC называется **переходной** (разделительной), используется она в различных устройствах, например для связи между каскадами. Так, в устройствах на электронных лампах переходная цепь разде-

ляет каскады, чтобы постоянное напряжение с анода предшествующей лампы не попадало на сетку лампы последующего каскада.

Будем теперь увеличивать длительность импульса. По мере того как различие в величинах τ_C и $t_и$ уменьшается, конденсатор за время $t_и$ успевает заряжаться до большего напряжения и форма выходного импульса будет все заметнее отличаться от формы входного импульса. На рис. 23,*в* показана форма выходного напряжения при

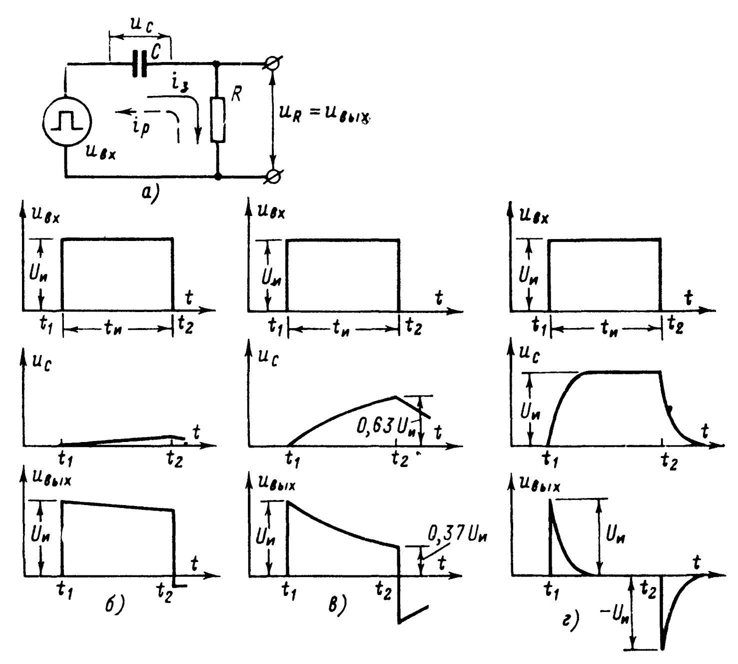


Рис. 23. Прохождение импульса через переходную и дифференцирующую цепь.

а — схема; *б* — эпюры напряжений при $\tau_C \gg t_и$; *в* — то же при $\tau_C = t_и$; *г* — то же при $\tau_G \ll t_и$.

соотношении $\tau_C = t_и$. За время $t_и$ конденсатор успевает зарядиться до $u_C(t_и) = 0{,}63U_и$, поэтому выходное напряжение в течение импульса непрерывно уменьшается и в конце импульса составит $u_R(t_и) = U_и - u_C(t_и) = U_и - 0{,}63U_и = 0{,}37U_и$. После окончания действия входного импульса (при $t \geqslant t_2 = t_и$) в цепи возникает переходный процесс, обусловленный рассеянием энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора. В цепи появляется разрядный ток конденсатора, направление которого противоположно зарядному (направления токов показаны на рис. 23,*а*), и на выходе цепи возникает импульс отрицательной полярности. Для расчета этого процесса можно использовать формулы (20), (21), (22), в которых время t надо заменить на $t - t_и$, а E на $u_C(t_и)$.

Наконец, если длительность импульса возрастает настолько, что выполняется условие $\tau_C \ll t_и$, то конденсатор успеет полностью зарядиться уже в самом начале импульса $u_C = U_и$. После этого выходное напряжение станет равным нулю $u_{вых} = U_и - u_C = 0$. На выходе появится короткий импульс положительной полярности, обусловленный протеканием зарядного тока, с амплитудой, равной $U_и$. В момент окончания входного импульса в цепи возникает ток разряда конденсатора и на выходе цепи появится короткий отрицательный импульс $-U_и$ (рис. 23,*г*).

Цепь RC, у которой постоянная времени во много раз меньше длительности входного импульса, называется д и ф ф е р е н ц и р у ю щ е й (укорачивающей) цепью. Дифференцирующей такая цепь называется потому, что ее выходной сигнал (с некоторой погрешностью) соответствует производной от входного сигнала. Чем меньше постоянная времени цепи, тем более точным оказывается процесс дифференцирования.

Таким образом, при подаче на вход дифференцирующей цепи прямоугольного импульса на выходе образуются два коротких импульса: положительный, обусловленный процессом заряда конденсатора, и отрицательный — процессом его разряда. Импульсы на выходе дифференцирующей цепи имеют крутой фронт и экспоненциально убывающий срез; длительность этих импульсов определяется лишь постоянной времени дифференцирующей цепи и на уровне 0,5 амплитуды импульса оказывается равной

$$t_{и.вых} \approx 0{,}7RC.$$

В этом легко убедиться, если наложить на экспоненциально убывающую функцию условия

$$0{,}5U_и = U_и e^{-\frac{t_{и.вых}}{\tau_C}}.$$

Берем натуральный логарифм от правой и левой частей

$$\ln 0{,}5 = -\frac{t_{и.вых}}{RC}\ln e,$$

откуда получаем:

$$t_{и.вых} = (-\ln 0{,}5)RC \approx 0{,}7RC.$$

Одна и та же цепь RC может быть для импульсов одной длительности переходной, а для импульсов другой (большей) длительности — дифференцирующей.

Все реальные импульсы имеют конечную длительность фронта. Если длительность фронта $t_ф$ входного импульса меньше постоянной времени цепи, а длительность самого импульса больше τ_C, то для фронта входного импульса цепь RC будет переходной, а для самого импульса — дифференцирующей. Форма такого импульса на входе и выходе дифференцирующей цепи показана на рис. 24.

Для укорочения длительности выходных импульсов уменьшают постоянную времени дифференцирующей цепи. Однако выбирать τ_C меньше длительности фронта входного импульса нецелесообразно, так как это приводит к значительному уменьшению амплитуды выходного импульса без заметного его укорочения [Л. 5].

Дифференцирующие цепи применяются для формирования коротких импульсов из более длинных, для селекции импульсов по длительности и т. д.

Обратимся теперь к цепи RC, на входе которой действует импульс длительностью $t_и$, а выходное напряжение $u_{вых} = u_C = U_и\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$ снимается с конденсатора (рис. 25, *а*). Если постоянная времени цепи удовлетворяет условно $\tau_C \ll t_и$, то за время $t_и$ конденсатор полностью зарядится. После окончания входного импульса происходит разряд конденсатора и выходное напряжение будет иметь форму, показанную на рис. 25,*б*.

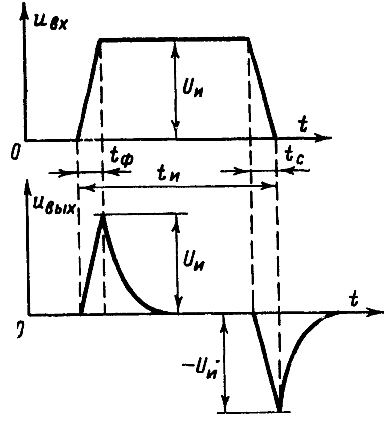


Рис. 24. Прохождение импульса трапецеидальной формы через дифференцирующую цепь при $t_ф < \tau_C \ll t_и$.

По мере увеличения постоянной времени конденсатор к концу импульса заряжается до меньшего напряжения, а время его разряда после окончания входного импульса увеличивается. Выходное напряжение при этом имеет вид импульса с растянутым фронтом и срезом, форма его при соотношении $\tau_C = 2t_и$ показана на рис. 25,*в*.

Электрическая цепь, у которой при воздействии на вход короткого импульса на выходе образуется более длинный импульс, называется и н т е г р и р у ю щ е й (удлиняющей) цепью.

Интегрирующей такая цепь называется потому, что ее выходной сигнал (с некоторой погрешностью) прямо пропорционален интегралу от входного сигнала.

Применяются интегрирующие цепи для селекции импульсов по длительности. Например, в телевизорах интегрирующая цепь обычно включается между амплитудным селектором и генератором кадро-

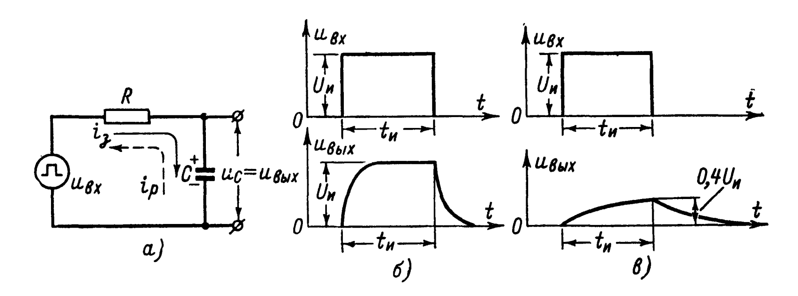


Рис. 25. Прохождение импульса через интегрирующую цепь.
а — схема; *б* — выходное напряжение при $\tau_C \ll t_и$; *в* — то же при $\tau_C = 2t_и$.

вой развертки для выделения длительных кадровых синхронизирующих импульсов и фильтрации кратковременных строчных импульсов от импульсных помех.

Следует заметить, что дифференцирующая и интегрирующая цепи это одна и та же цепь RC, только в первом случае она имеет относительно малую постоянную времени и выходной сигнал снимается с резистора; во втором случае цепь имеет относительно большую постоянную времени, а выходной сигнал снимается с конденсатора.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ RL

Уравнение последовательной цепи RL

Рассмотрим переходные процессы в электрических цепях, представляющих собой комбинации резистора и катушки индуктивности (цепи RL). В первую очередь проанализируем переходные процессы в последовательной цепи RL. Как правило, в таких цепях рекомендуется вначале найти ток, а затем напряжения на резисторе и катушке индуктивности.

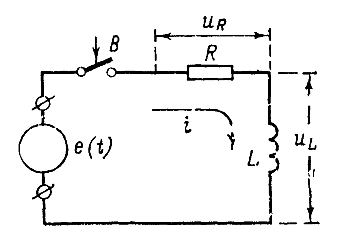


Рис. 26. Схема цепи RL.

Обратимся к цепи, показанной на рис. 26, ко входу которой при замыкании выключателя в момент $t=0$ подключается источник э. д. с. $e(t)$. Возникающий переходный процесс определяется протекающим в цепи током, принятое положительное направление которого указано на схеме стрелкой. Воспользуемся вторым законом Кирхгофа (сумма падения напряжения на резисторе и э. д. с. самоиндукции катушки уравновешивается внешней э. д. с.) и для промежутка времени $t \geqslant 0$ запишем уравнение для мгновенных значений напряжений

$$u_L + u_R = e(t).$$

Подставив значения u_L и u_R (см. табл. 1) и разделив обе части на R, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{1}{R}e(t), \tag{24}$$

по своей структуре аналогичное уравнению (2), в котором неизвестной функцией является ток $x(t)=i$, а величина $\tau = L/R$. Согласно «классическому» методу решение ищем в виде суммы двух токов: вынужденного $i_в$ и свободного $i_{св} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$, т. е.

$$i = i_в + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{25}$$

Ниже рассматриваются переходные процессы в цепях RL при различных внешних воздействиях.

Включение в цепь RL постоянной э. д. с.

Пусть ко входу цепи подключается источник э. д. с., форма которой изображена на рис. 8,*б*. Такая задача имеет место при подключении обмотки реле к источнику постоянного напряжения. В данном случае $e(t)=E$ и исходное уравнение (24) принимает вид:

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=\frac{E}{R}$$

(верхнюю по схеме клемму источника считаем положительной).

Вначале найдем вынужденный ток, который совпадает с установившимся (постоянным) током в цепи $i_в=E/R$. Тогда согласно (25) полный ток в цепи будет:

$$i=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Воспользуемся начальными условиями [к моменту коммутации ток в цепи был равен нулю $i(0_-)=0$] и определим постоянную A. Из последнего уравнения при $t=0$ имеем:

$$i\,(0)=\frac{E}{R}+A.$$

Кроме того, ток i должен удовлетворять первому закону коммутации, согласно которому $i(0_-)=i(0_+)=i(0)=0$. Из полученных равенств для начального момента времени находим $A=-E/R$; таким образом, получаем следующее выражение для свободного тока:

$$i_{св}=-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Полный ток в цепи

$$i=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Как и следовало ожидать, полный ток в цепи не устанавливается мгновенно и требуется определенное время до получения установившегося режима с током, равным E/R. Анализ решения также показывает, что в первый момент после воздействия ступенчатого сигнала катушка фактически разрывает цепь между зажимами, к которым она подключена, так как при $t(0_+)$ значение $i(0_+)=0$. На рис. 27,*а* изображены графики вынужденного, свободного и полного токов. В момент $t=0$ сумма токов $i_в+i_{св}=0$, что обеспечивает выполнение начальных условий. В дальнейшем с течением времени свободный ток убывает, а полный ток, нарастая по экспоненциальному закону, стремится к установившемуся значению E/R.

Величина L/R для данной цепи постоянна (поскольку R и L не изменяются), обозначается буквой τ_L и называется постоянной времени цепи RL

$$\tau_L=\frac{L}{R}.$$

Размерность постоянной времени — секунда

$$[\tau_L]=\left[\frac{L}{R}\right]=\left[\frac{\text{Гн}}{\text{Ом}}\right]=\left[\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{В}\cdot\text{А}}\right]=[\text{с}].$$

Длительность переходного процесса в цепи пропорциональна величине τ_L. Действительно, чем больше L, тем больше э. д. с. самоиндукции катушки ($e_L=-Ldi/dt$), препятствующая нарастанию тока, и тем медленнее устанавливается стационарный ток в цепи. С другой стороны, чем меньше R (при том же значении E), тем больше времени требуется для установления стационарного состояния, так как конечное значение тока имеет большую величину. Постоянная времени служит мерой продолжительности переходного процесса и позволяет сравнивать различные цепи в отношении времени установления стационарного режима.

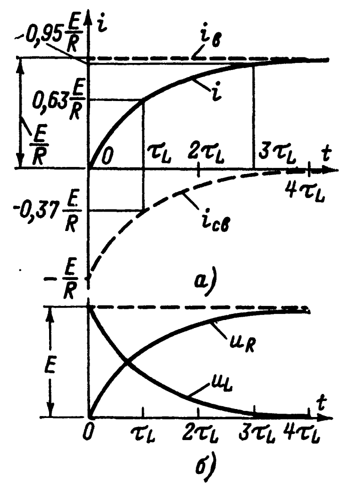


Рис. 27. Кривые изменения тока (*а*) и напряжений на резисторе и катушке индуктивности (*б*) в цепи RL при включении постоянной э. д. с.

Как видно из рис. 27,*а*, за время $t=\tau_L$ полный ток в цепи достигает 0,63 установившегося значения, а свободная составляющая тока $i_{св}$ за это время уменьшается в e раз (по абсолютной величине). Время установления тока в цепи RL обычно принято считать равным $t_{уст}=3\tau_L$. В течение $t_{уст}$ ток достигает 0,95 установившегося значения и переходный процесс считается практически закончившимся. Например, если индуктивность катушки $L=1$ Гн, а сопротивление резистора $R=100$ Ом, то продолжительность переходного процесса $t_{уст}=3\cdot 1/100=0{,}03$ с.

Напряжения на резисторе R и катушке L определяются выражениями

$$u_R=iR=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=Ee^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Графически они показаны на рис. 27,*б*. В начальный момент напряжение на катушке равно э. д. с. источника $u_L(0)=E$, а так как до коммутации напряжение $u_L(0_-)=0$, то в момент включения эта величина в отличие от тока изменяется скачком от нуля до E. Это физически возможно, так как скачок напряжения на катушке не приводит к скачкообразному изменению запаса энергии магнитного поля.

Полезно обратить внимание, что ток в последовательной цепи RL возрастает по тому же закону, по которому возрастает напряжение на конденсаторе в цепи RC при воздействии на нее э. д. с. включения. По одинаковым законам также изменяются напряжение на катушке и ток в цепи RC.

Короткое замыкание цепи RL

Пусть цепь, изображенная на рис. 28,*а*, находится в установившемся режиме и в ней протекает постоянный ток $I_0 = E/(R'+R)$. Замкнем выключатель в момент $t=0$. Ток в короткозамкнутой части цепи RL исчезает не сразу. На зажимах катушки возникает э. д. с. самоиндукции, которая за счет энергии, накоплен-

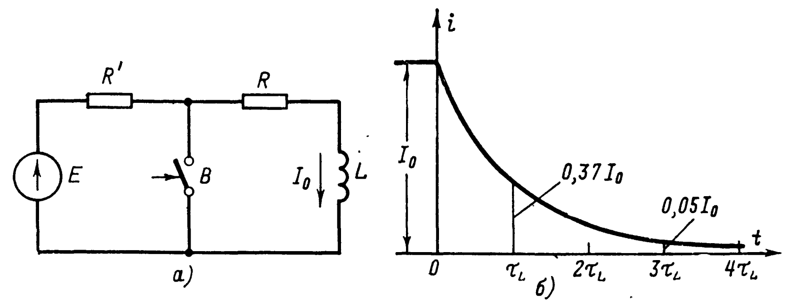


Рис. 28. Короткое замыкание цепи RL.
а — схема; *б* — график тока в цепи.

ной до этого в магнитном поле, стремится поддержать ток. По мере того, как энергия магнитного поля рассеивается, превращаясь в резисторе R в тепло, ток в контуре уменьшается и, в конце концов, становится равным нулю.

Для короткозамкнутой части цепи на основании второго закона Кирхгофа можно записать $u_L + u_R = 0$, т. е.

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0.$$

Разделив обе части уравнения на R, получим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = 0, \qquad (26)$$

по своей структуре аналогичное уравнению (3). Решение полученного уравнения будет состоять только из свободной составляющей тока

$$i = i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Воспользуемся начальными условиями и найдем постоянную A. Из последнего выражения при $t=0$ имеем $i(0)=A$. С другой сторо-

ны, по первому закону коммутации ток $i(0_-)=i(0_+)=i(0)=I_0$, так как перед коммутацией в цепи протекал ток I_0 Следовательно, $A=I_0$ и ток в короткозамкнутой части цепи изменяется согласно уравнению

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

по экспоненциальной кривой (рис. 28,*б*).

Продолжительность переходного процесса определяется постоянной времени цепи. Переходный процесс в короткозамкнутой цепи RL считают практически закончившимся спустя $t_{уст}=3\tau_L$, когда ток в цепи спадает до 0,05 первоначального значения.

Физически постоянная времени цепи RL представляет собой время, в течение которого свободная составляющая тока в цепи уменьшится в e раз (в 2,72 раза); действительно, $i(\tau_L)=I_0/e=0{,}37I_0$.

Величина возникающей в катушке э. д. с. самоиндукции e_L может быть найдена дифференцированием выражения для тока

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В начальный момент ($t=0$) э. д. с. самоиндукции максимальна $e_{L\,макс}=I_0R$ и с течением времени убывает по экспоненциальной кривой.

С энергетической точки зрения процесс короткого замыкания цепи RL характеризуется тем, что вся энергия, запасенная до коммутации в магнитном поле катушки, в течение переходного процесса рассеивается в виде тепла на резисторе R.

Следует обратить внимание на то, что величина $e_{L\,макс}$ пропорциональна активному сопротивлению цепи, поэтому размыкание цепей RL, находящихся под током (см. схему рис. 26), часто сопровождается искрой, возникающей между контактами выключателя. Появление искры обусловлено переходными явлениями. Действительно, при размыкании выключателя сопротивление цепи, по которой протекает ток, резко возрастает; при этом возникает значительная э. д. с. самоиндукции $e_{L\,макс}\to\infty$, которая стремится поддержать ток в цепи, что и приводит к электрическому пробою воздушного промежутка между контактами выключателя.

Включение в цепь RL гармонической (синусоидальной) э. д. с.

Пусть внешнее воздействие на цепь при $t\geqslant 0$ выражается синусоидальной функцией (23). Для анализа процессов в цепи воспользуемся «классическим» методом и исходное уравнение (24) с учетом воздействующего напряжения запишем в виде

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \psi).$$

Вынужденный ток, который одновременно является и установившимся током, определяется по закону Ома для цепи переменного тока, находящейся в стационарном режиме,

$$i_в = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $I_m = U_m/z$ — амплитуда установившегося тока в цепи;
$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ — модуль полного сопротивления цепи;
$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$ — фазовый сдвиг между током в цепи и воздействующим напряжением.

Подставив значения для $i_в$ в формулу (25), получим:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Найдем постоянную A, использовав начальное условие: ток в цепи до коммутации был равен нулю. Из последнего уравнения при $t=0$ имеем $i(0) = I_m \sin(\psi - \varphi) + A$. Согласно первому закону коммутации $i(0_-) = i(0_+) = i(0) = 0$. Использовав оба условия, найдем $A = -I_m \sin(\psi - \varphi)$. Таким образом, свободная составляющая тока в цепи

$$i_{св} = -I_m \sin(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

а полный ток в цепи определится выражением

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m (\psi - \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Как следует из последнего уравнения, если включение произойдет в момент, когда $\psi - \varphi = \pm\pi/2$, то начальное значение свободного тока получается максимальным. Именно для такого случая ($\psi - \varphi = \pi/2$) на рис. 29 изображены кривые изменения полного тока i и составляющих $i_в$ и $i_{св}$.

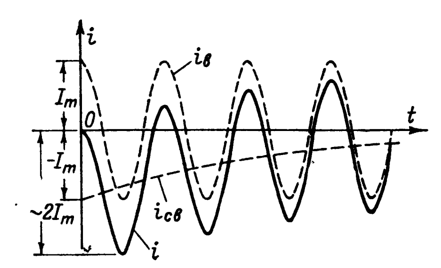


Рис. 29. График тока в цепи RL при включении гармонической э. д. с.

Начальные ординаты вынужденного и свободного токов одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку, поэтому ток i в момент $t=0$ равен нулю. Вынужденный ток синусоидален, а свободный затухает, не меняя своего направления. В начале переходного процесса в те моменты, когда обе составляющие имеют одинаковое направление, а вынужденный ток приближается к своей амплитудной величине, амплитуда полного тока в цепи принимает наибольшее значение, приблизительно равное двойной амплитуде I_m вынужденного (установившегося) тока. Это особенно заметно, если свободный ток медленно затухает (при малых R). По мере затухания $i_{св}$ полный ток в цепи стремится к значению вынужденного (установившегося) тока.

Интересно отметить, что, если включение происходит в момент, когда $\psi - \varphi = 0$, то свободная составляющая тока вообще не возникает $i_{св}(0) = 0$ (так как $\sin 0° = 0$) и в цепи сразу же устанавливает-

ся ток стационарного режима. Причина такого необычного на первый взгляд явления заключается в том, что вынужденный ток, который при $\psi-\varphi=0$ равен $i_в=I_m \sin \omega t$, в момент $t=0$ обращается в нуль и, таким образом, начальные условия $i(0)=0$, вытекающие из первого закона коммутации, выполняются без свободного тока.

Включение в цепь RL линейно нарастающей э. д. с.

Рассмотрим переходный процесс в цепи RL при подключении ее к источнику э. д. с., изменяющейся по линейному закону (рис. 30,*а*)

$$e(t)=U_0+vt$$

в интервале $t \geqslant 0$. Здесь U_0 — начальный скачок напряжения в момент включения ($t=0$); v — угловой коэффициент, характеризующий скорость нарастания приложенного напряжения, размерность этого коэффициента В/с.

Ток в цепи при таком внешнем воздействии целесообразно искать с помощью формулы (12) или операторным методом; формулу (7) применять нельзя. Воспользуемся операторным методом и согласно второму закону Кирхгофа запишем уравнение

$$U_L(p)+U_R(p)=E(p).$$

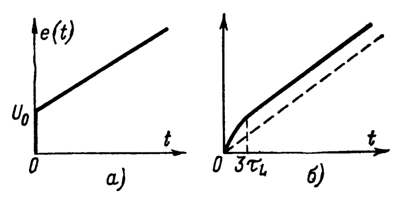


Рис. 30. Форма э. д. с., действующей на цепь RL (*а*), и форма тока в цепи (*б*).

Значение $U_L(p)$ и $U_R(p)$ находим в табл. 4. Приложенная э. д. с. математически выражается двумя слагаемыми и, чтобы найти ее изображение $E(p)$, воспользуемся теоремой: изображение суммы равно сумме изображений. Изображением постоянной U_0 является сама постоянная, а изображение слагаемого vt берем из табл. 3 [формула (3-2)]. Таким образом, получаем уравнение

$$pLI(p)+RI(p)=U_0+v\frac{1}{p},$$

из которого находим изображение тока

$$I(p)=U_0\frac{1/L}{p+R/L}+v\frac{1/L}{p(p+R/L)}=$$

$$=\frac{U_0}{R}\frac{R/L}{p+R/L}+\frac{v}{L}\frac{1}{p(p+R/L)}.$$

Первые множители в каждом слагаемом представляют собой постоянные величины, вторые множители обоих слагаемых есть в табл. 3 [формулы (3-4) и (3-5) соответственно].

Следовательно, искомый ток запишется выражением

$$i=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)+\frac{v}{L}\left(\frac{L}{R}\right)^2\left(e^{-\frac{t}{\tau_L}}+\frac{R}{L}t-1\right),$$

которое после простых преобразований можно представить в виде

$$i = \frac{v}{R} t + \frac{U_0 - v\tau_L}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right).$$

Здесь $\tau_L = L/R$. График тока изображен на рис. 30,*б* (сплошная линия).

Характер нарастания тока в интервале от 0 до $3\tau_L$ отличается от линейного, а при $t > 3\tau_L$ это различие практически исчезает. Однако, если начальная ступенька U_0 равна приращению входного напряжения за время τ_L, т. е. $U_0 = v\tau_L$, то второе слагаемое в выражении для тока обращается в нуль и с момента включения ток в цепи возрастает линейно (штриховая линия на рис. 30,*б*). Следовательно, подбирая величину напряжения U_0 в момент включения, можно добиться, чтобы ток в кагушке изменялся по линейному закону. Такой способ получения линейно нарастающего тока в цепи с индуктивностью используется в отклоняющих системах электронно-лучевых трубок с магнитным управлением.

Подключение параллельной цепи RL к генератору тока

Пусть на параллельную цепь RL, изображенную на рис. 31,*а*, воздействует ток ступенчатой формы $z(t) = I1(t)$ (генератор тока). Найдем напряжение на элементах R, L. Здесь проще всего

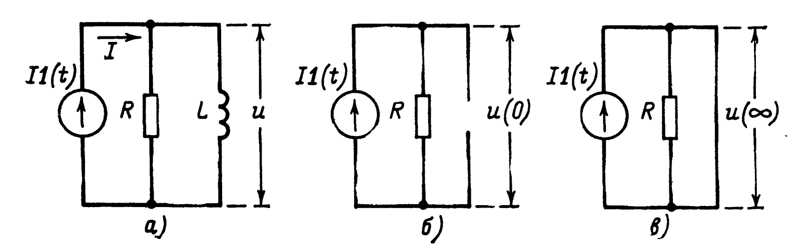


Рис. 31. Воздействие на цепь RL генератора тока.
а — схема цепи; *б* — эквивалентная схема для момента времени $t=0$; *в* — то же для $t=\infty$.

воспользоваться формулой (8). В начальный момент $t=0$ имеем эквивалентную схему рис. 31,*б*, из которой находим $u(0) = IR$. Из эквивалентной схемы рис. 31,*в* определяем установившееся значение напряжения $u(\infty) = 0$. Постоянная времени цепи $\tau_L = L/R$.

Следовательно, искомое напряжение выразится формулой

$$u = 0 + (IR - 0)\, e^{-\frac{t}{\tau_L}} = IRe^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

График напряжения представляет собой экспоненциально убывающую кривую.

Переходные процессы в цепях RL с ненулевыми начальными условиями

Увеличение активного сопротивления цепи. Пусть в цепи, изображенной на рис. 32,*а*, протекает установившийся постоянный ток $I_0=E/R_1$ и в момент $t=0$ происходит размыкание выключателя B. Найдем ток в цепи при $t \geqslant 0$. Воспользуемся формулой (7), для которой необходимые величины определяются непосредственно из схемы цепи. Начальный ток $i(0)=I_0=E/R_1$; ток нового стационарного режима цепи после размыкания выключателя $i(\infty)=E/(R_1+R_2)$; постоянная времени такой цепи $\tau_L=L/(R_1+R_2)$, следовательно, ток в цепи

$$i=\frac{E}{R_1+R_2}+\left(\frac{E}{R_1}-\frac{E}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

или после несложных преобразований можно записать:

$$i=\frac{E}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right).$$

График тока показан на рис. 32,*б*. Ток плавно уменьшается по экспоненте от начальчой величины E/R_1 до значения, равного $E/(R_1+R_2)$.

Уменьшение активного сопротивления цепи. Рассмотрим ту же цепь, в которой ключ B разомкнут и установившийся ток $I_0=$ $=E/(R_1+R_2)$. Найдем ток в цепи, если в момент $t=0$ происходит замыкание резистора R_2. По-прежнему воспользуемся формулой (7), для которой $i(0)=E/(R_1+R_2)$, $i(\infty)=E/R_1$, а $\tau'_L=L/R_1$. Таким образом, искомый ток запишется выражением

$$i=\frac{E}{R_1}+\left(\frac{E}{R_1+R_2}-\frac{E}{R_1}\right)e^{-\frac{t}{\tau'_L}},$$

которое после простых преобразований принимает вид:

$$i=\frac{E}{R_1}\left(1-\frac{R_2}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau'_L}}\right).$$

График тока изображен на рис. 32,*в*. Обратим внимание, что в этом случае продолжительность переходного процесса больше, чем в предыдущем примере [так как постоянная времени цепей различна $L/R_1>L/(R_1+R_2)$].

Отключение катушки от источника постоянного напряжения. Рассмотрим переходный процесс, возникающий при отключении катушки L, $r_к$ и шунтирующего ее резистора R_2 от источника постоянного напряжения (рис. 33,*а*). Найдем ток в отключаемой части цепи и напряжение u на резисторе R_2. Активное сопротивление обмотки катушки $r_к$ невелико, так что обычно выполняется условие $R_2 \gg r_к$. Поэтому к моменту коммутации через катушку протекает ток, равный $i_L(0)=E/(R_1+r_к)$. Новое стационарное значение тока в катушке после размыкания выключателя будет $i_L(\infty)=0$. Постоянная време-

ни отключенной части цепи $\tau_L = L/(R_2+r_к) \approx L/R_2$. Тогда согласно формуле (7) имеем:

$$i_L = 0 + \left(\frac{E}{R_1 + r_к} - 0\right) e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{E}{R_1 + r_к} e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В момент перед коммутацией напряжение на резисторе R_2 было $u(0_-) \approx Er_к/(R_1+r_к)$. В первый момент после размыкания выключателя это напряжение скачком изменяется до величины $u(0_+) = -i_L(0_+)R_2 = -ER_2/(R_1+r_к)$, которая может во много раз превысить докоммутационное значение. В этом нетрудно убедиться, вычислив отношение

$$\left|\frac{u\ (0_+)}{u\ (0_-)}\right| = \frac{R_2}{r_к} \gg 1.$$

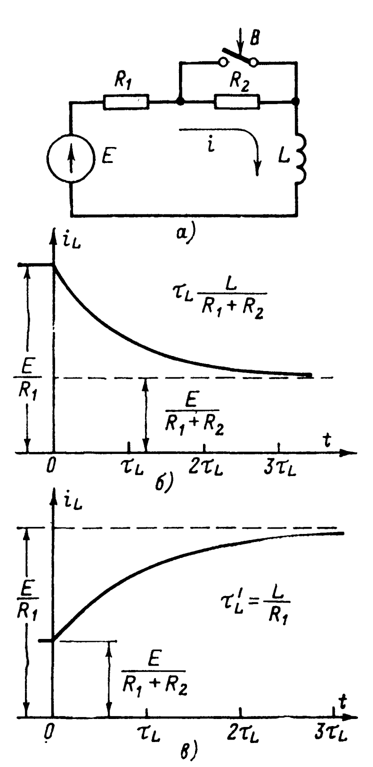


Рис. 32. Изменение активного сопротивления цепи RL.

а — схема цепи; *б* — график тока в цепи при увеличении сопротивления R; *в* — то же при уменьшении R.

Если параллельно катушке был подключен вольтметр (рис. 33,*б*), имеющий большое входное сопротивление $R_в$, то в момент отключения цепи напряжение на зажимах прибора повысится в $R_в/r_к$ раз и может привести к его порче. Поэтому при таких измерениях прибор следует отсоединить до размыкания цепи.

Вообще при отключении от источников питания катушек с большой индуктивностью их предварительно следует замыкать на небольшое сопротивление, чтобы исключить возникновение перенапряжений.

Рассмотренный пример иллюстрирует случай, когда переходные процессы возникают в цепи, отключенной от источника энергии.

Изменение индуктивности цепи. Обратимся к цепи, изображенной на рис. 34, в которой в момент $t=0$ происходит размыкание выключателя и в цепь дополнительно включается катушка L_2, r_2. До коммутации в цепи протекал постоянный ток, равный E/r_1.

Найдем ток i в цепи при $t \geqslant 0$. Здесь также можно воспользоваться формулой (7). Установившаяся величина тока в цепи $i(\infty) = E/(r_1+r_2)$, а постоянная времени цепи после коммутации $\tau_L = (L_1+L_2)/(r_1+r_2)$. Однако для определения начального тока $i(0_+)$ в цепи нельзя воспользоваться первым законом коммутации и это приводит к некоторым трудностям.

Действительно, перед коммутацией токи в катушках были различны. Ток в катушке L_1 (обозначим его i_1) в момент $t(0_-)$ равен $i_1(0_-)=E/r_1$, а ток в L_2 (обозначим его i_2) равен $i_2(0_-)=0$, так как эта катушка была замкнута накоротко. С другой стороны, после коммутации в момент $t(0_+)$ токи в обеих катушках, поскольку они со-

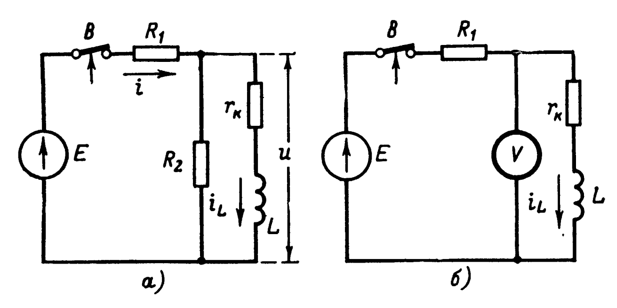


Рис. 33. Коммутация в цепи RL.

а — отключение катушки с шунтирующим резистором; *б* — отключение катушки с вольтметром от источника постоянного напряжения.

единены последовательно, должны стать одинаковыми и равными току в цепи, т. е. $i_1(0_+)=i_2(0_+)=i(0_+)$. Однако ток в катушке L_1 в момент коммутации скачком измениться не может, а ток в катушке L_2 равен нулю, поэтому ток i_1 должен замкнуться через искру, возникающую между расходящимися контактами выключателя Кроме того, если под L_2 подразумевать реальную катушку, то ток i_1 может частично замкнуться и через межвитковую емкость данной катушки. Это начальная стадия переходного процесса длится весьма малый промежуток времени, и поэтому условно можно считать, что токи в катушках уравниваются мгновенно.

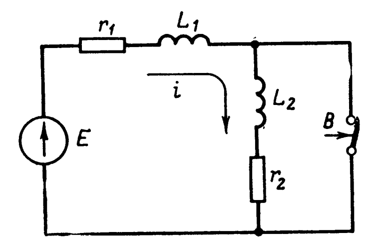


Рис. 34. Изменение индуктивности цепи.

Для того чтобы найти начальное значение тока в катушках, воспользуемся правилом непрерывности суммарного потокосцепления в цепи при коммутации, т. е. $\psi_1(0_-)+\psi_2(0_-)=\psi_1(0_+)+\psi_2(0_+)$ или $L_1i_1(0_-)+L_2i_2(0_-)=L_1i_1(0_+)+L_2i_2(0_+)$. Подставив значения токов, получим:

$$L_1\frac{E}{r_1}+0=L_1i(0_+)+L_2i(0_+),$$

откуда находим:

$$i(0_+)=\frac{E}{r_1}\frac{L_1}{L_1+L_2}.$$

Таким образом, ток в цепи согласно формуле (7) может быть описан уравнением

$$i = \frac{E}{r_1 + r_2} + \left(\frac{E}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{E}{r_1 + r_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Если при анализе этой цепи, в которой происходит изменение величины энергоемкого элемента (L), рассмотреть процессы во время коммутации, когда от нуля до бесконечности изменяется сопротивление расходящихся контактов выключателя, то можно показать, что и в этом случае первый закон коммутации остается справедливым. Однако такой анализ сложен и связан с рассмотрением нелинейной цепи.

Замыкание катушки в цепи переменного тока. Цепь (рис. 35) подключена к источнику переменного напряжения синусоидальной формы и находится в установившемся режиме. При этом в цепи протекает ток, который согласно выражению (23) и закону Ома равен:

$$i = \frac{U_m}{z} \sin (\omega t + \psi - \varphi),$$

где $z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}$ — модуль полного сопротивления цепи;

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R_1 + R_2}$ — фазовый сдвиг между током и приложенным к цепи напряжением.

В момент $t=0$ выключатель B накоротко замыкает участок цепи R_2, L. Найдем выражение для тока $i_{к.з}$ в короткозамкнутой части цепи. Уравнение для тока $i_{к.з}$, очевидно, аналогично уравнению (26), и его решение будет содержать только свободную составляющую

$$i_{к.з} = i_{к.з.св} = A e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

где $\tau_L = L/R_2$ — постоянная времени короткозамкнутого участка цепи.

Величина A определяется током, который протекал в катушке в момент $t=0$. Действительно, согласно первому закону коммутации

$$i_{к.з} (0) = i (0) = \frac{U_m}{z} \sin (\psi - \varphi) = A.$$

Таким образом, искомый ток равен:

$$i_{к.з} = \frac{U_m}{z} \sin (\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Обратим внимание, что переходный процесс не возникает и $i_{к.з}=0$, если $\sin (\psi - \varphi) = 0$, т. е. при $\psi - \varphi = 0$. Физически это объясняется тем, что в момент замыкания выключателя установившийся ток в цепи принимает нулевое значение $[i(0) = 0]$; согласно же закону коммутации ток в катушке останется равным нулю и в первый момент после замыкания цепи, т. е. $i_{к.з}(0_+) = i(0) = 0$.

Цепи, в которых при коммутации не возникает переходный процесс. Рассмотрим процессы в цепи (рис. 36,*а*), в которой сопротивления обмоток катушек индуктивности приняты равными нулю $r_1 = r_2 = 0$.

Перед коммутацией цепь находилась в стационарном режиме и в ней протекал постоянный ток $I_0 = E/R_1 = i(0_-)$. После коммутации наступит новый стационарный режим, при котором, как легко заметить, величина тока останется прежней. Следовательно, количество энергии, накопленной в магнитных полях катушек L_1 и L_2, при коммутации не изменится и в цепи не должен возникнуть переходный процесс. Действительно, применяя формулу (7), для которой $i(0) = i(0_-) = E/R_1$, $i(\infty) = E/R_1$, получим:

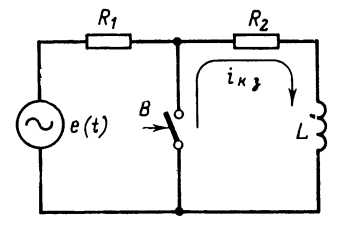


Рис. 35. Короткое замыкание катушки в цепи переменного тока.

$$i = \frac{E}{R_1} + \left(\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1}\right) e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{E}{R_1},$$

т. е. в цепи до, после и в момент коммутации протекает один и тот же постоянный ток. Здесь полезно еще раз подчеркнуть основное положение, что возникновение переходных процессов всегда связано с изменением количества энергии в электромагнитном поле цепи.

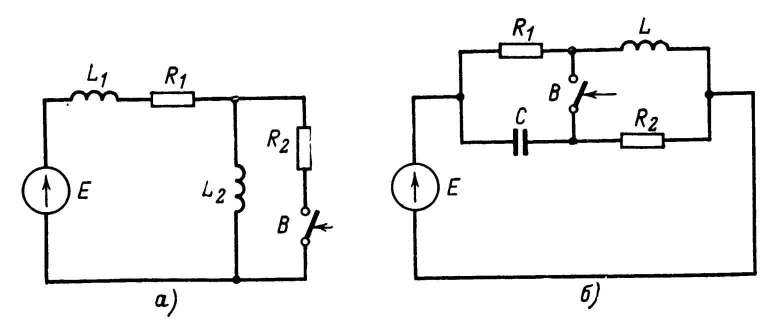


Рис. 36. Схемы цепей, в которых при коммутации не возникает переходный процесс.

Читателю предлагается самостоятельно проанализировать энергетические зависимости в цепи, изображенной на рис. 36,*б*, и убедиться, что при замыкании выключателя *B* переходный процесс в цепи также не возникает, если сопротивление обмотки катушки равно нулю, а сопротивление утечки конденсатора равно бесконечности.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ *RLC*

Общие замечания

Дадим качественную и количественную оценки переходных процессов в электрических цепях, содержащих резистор, катушку и конденсатор. Переходные процессы в электрических цепях, в элементах которых энергия может накапливаться одновременно в магнитном и электрическом полях (цепи *RLC*), имеют более слож-

ный характер. При простых внешних воздействиях (постоянная или гармоническая э. д. с.) исследование таких цепей проводится «классическим» или операторным методом [формулы (7) и (8) здесь применить нельзя]. При более сложных воздействиях используются суперпозиционный или другие методы анализа, которые нами не рассматривались.

Электрические цепи, состоящие из катушки и конденсатора (именуемые колебательными контурами), широко используются в различных радиотехнических устройствах. Активное сопротивление таких цепей (сопротивление потерь) обычно невелико и при работе этих цепей в установившемся режиме в ряде случаев может не учитываться. Однако при исследовании переходных процессов активное сопротивление всегда должно приниматься во внимание.

Напомним некоторые формулы, относящиеся к колебательной цепи RLC, которые понадобятся в дальнейшем.

Резонансная частота контура (без учета потерь)

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

волновое сопротивление контура

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R},$$

полоса пропускания контура

$$2\Delta f_0 = f_0/Q.$$

Из методических соображений в первую очередь исследуем переходные процессы, возникающие в последовательной цепи RLC при разряде конденсатора на катушку индуктивности и резистор.

Разряд конденсатора на катушку индуктивности и резистор

Обратимся к цепи, изображенной на рис. 37, в которой конденсатор C заряжен до напряжения $u_C(0) = U_0$ и в момент $t=0$ происходит замыкание выключателя. В образовавшемся замкнутом контуре возникает ток. Энергия, которая была запасена в электрическом поле конденсатора, будет выделяться в виде тепла в активном сопротивлении цепи и частично переходить в энергию магнитного поля катушки. Очевидно в этом случае в контуре будут иметь место только свободные составляющие тока и напряжений, так как внешнее воздействие отсутствует и при $t \to \infty$ ток и напряжения в цепи обращаются в нуль.

Как будет видно из дальнейшего, характер переходных процессов существенно зависит от величины активного сопротивления цепи, которое учитывает потери в катушке, конденсаторе, соединительных проводах, а также потери на излучение и т. д. Отметим, что в явном виде элемент R в контурах часто отсутствует.

Для выяснения характера переходных процессов найдем выражение для тока в цепи. Воспользуемся вторым законом Кирхгофа и для $t \geqslant 0$ запишем уравнение

$$u_R + u_L + u_C = 0. \qquad (27)$$

Выразим все слагаемые через ток разряда конденсатора в контуре $i_р$, условно принятое положительное направление которого показано на рис. 37. Согласно формулам табл. 1 имеем:

$$i_р R + L\frac{di_р}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_р\,dt + u_C(0) = 0.$$

Для того чтобы избавиться от интеграла $\frac{1}{C}\int_0^t i_р\,dt$, продифференцируем все члены уравнения по t

$$R\frac{di_р}{dt} + L\frac{d^2 i_р}{dt^2} + \frac{i_р}{C} = 0$$

или

$$\frac{d^2 i_р}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_р}{dt} + \frac{i_р}{LC} = 0.$$

Как и следовало ожидать, получилось однородное дифференциальное уравнение второго порядка (цепь с двумя реактивными элементами), правая часть которого равна нулю (внешнее воздействие отсутствует). Для решения этого уравнения можно воспользоваться «классическим» методом. Однако такой путь решения сопряжен с довольно громоздкими математическими преобразованиями, которые выходят за рамки данной книги. Поэтому воспользуемся операторным методом, который позволяет быстро и просто, хотя и несколько формально, получить окончательное решение.

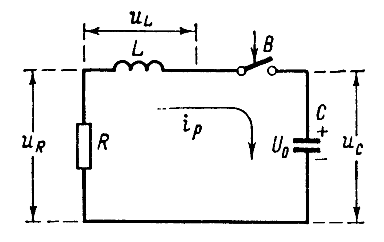


Рис. 37. Разряд конденсатора на катушку и резистор.

Запишем для рассматриваемой цепи операторное уравнение по второму закону Кирхгофа

$$U_R(p) + U_L(p) + U_C(p) = 0.$$

После подстановки соответствующих значений, взятых из табл. 4 и формул (9), и учитывая, что $u_C(0) = U_0$, получим обыкновенное алгебраическое уравнение

$$RI_р(p) + pLI_р(p) + \frac{I_р(p)}{pC} + U_0 = 0,$$

в котором неизвестной функцией является изображение тока $I_p(p)$. Решая уравнение относительно $I_p(p)$, находим:

$$I_p(p) = -\frac{U_0}{L}\frac{p}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

Обозначим $\alpha = R/2L$ — коэффициент затухания контура. Тогда знаменатель правой части уравнения может быть представлен в форме $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2$, т. е.

$$I_p(p) = -\frac{U_0}{L}\frac{p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}.$$

Первый множитель правой части — постоянная величина, второй есть в табл. 3 изображений [формула (3-9)]. Однако получившееся изображение, как это видно из (3-9), в зависимости от соотношения между коэффициентом затухания контура и его резонансной частотой (а именно $\alpha > \omega_0$, $\alpha = \omega_0$ и $\alpha < \omega_0$) имеет три различных оригинала (временны́х функций), что свидетельствует о том, что в контуре могут возникать разные типы переходных процессов.

Перед тем, как рассмотреть эти процессы, отметим, что условие $\alpha > \omega_0$ может быть записано в форме $R > 2\sqrt{L/C} = 2\rho$, равенство $\alpha = \omega_0$ равносильно $R = 2\rho$, а условие $\alpha < \omega_0$ равносильно $R < 2\rho$. В этом легко убедиться, если подставить значения $\alpha = R/2L$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ в исходные соотношения. Таким образом, характер процессов в контуре при разряде конденсатора оказывается существенно различным в зависимости от соотношения между активным и волновым сопротивлением контура. Рассмотрим возможные случаи.

а) Апериодический процесс ($R > 2\rho$).

Как видно из исходного условия $R > 2\rho$ (или $\alpha > \omega_0$), такой процесс имеет место в контурах со значительным активным сопротивлением (контуры с большими потерями).

Согласно формуле (3-9) ток в контуре i_p (ток разряда конденсатора) при $t \geqslant 0$ может быть представлен следующим выражением:

$$i_p = -\frac{U_0}{2\beta L}\left(e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t}\right),$$

где $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

Отрицательный знак перед выражением указывает, что истинное направление тока в цепи при разряде конденсатора противоположно направлению, условно принятому за положительное.

Напряжение на индуктивности при переходном процессе легко определяется по формуле $u_L = L\, di_p/dt$ и равно:

$$u_L = \frac{U_0}{2\beta}\left[(\alpha - \beta)e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)t}\right].$$

Напряжение на конденсаторе согласно выражению (27) будет равно $u_C = -u_R - u_L$, т. е.

$$u_C = \frac{U_0}{2\beta}\left[(\alpha + \beta)e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha - \beta)e^{-(\alpha+\beta)t}\right].$$

Проанализируем полученные выражения для $i_р$, u_C и u_L. В момент коммутации ($t=0$) напряжение на конденсаторе

$$u_C(0) = \frac{U_0}{2\beta}(\alpha + \beta - \alpha + \beta) = U_0,$$

а после окончания переходного процесса ($t \longrightarrow \infty$) обращается в нуль $u_C(\infty) = 0$.

Из выражения для u_C видно, что кривая напряжения u_C представляет собой разность двух экспоненциальных составляющих, одна из которых $e^{-(\alpha-\beta)t}$ медленно, а вторая $e^{-(\alpha+\beta)t}$ быстро затухает (так как $\alpha > \beta$, то и $\alpha + \beta > \alpha - \beta$). На рис. 38, *а* эти экспоненты изображены кривыми *1* и *2* соответственно. Каждая ордината первой экспоненты, в том числе и начальная, больше соответствующих ординат второй экспоненты. Результирующая кривая напряжения на конденсаторе получается при вычитании соответствующих ординат обеих экспонент и, как видно из рис. 38,*а*, с течением времени монотонно убывает, стремясь к нулю. Следовательно, перезаряда конденсатора в рассматриваемом случае не происходит.

Кривая разрядного тока $i_р$, как следует из полученного выражения, также представляет разность медленно и быстро убывающих экспоненциальных кривых (кривые *1* и *2* рис. 38,*б*). Однако поскольку начальные ординаты обеих экспонент одинаковы, то результирующая кривая тока здесь получается иной формы. Разность ординат экспонент всегда будет иметь знак ординаты медленно убывающей экспоненты. Следовательно, ток $i_р$ не меняет своего направления, т. е. получается неколебательным.

Кривая тока и ее составляющие изображены на рис. 38,*б*, на котором учтено отрицательное направление разрядного тока (знак минус в формуле для $i_р$). В начальный момент $t=0$ ток $i_р(0) = -U_0(1 - 1)/2\beta L = 0$ Затем ток возрастает по абсолютному значе-

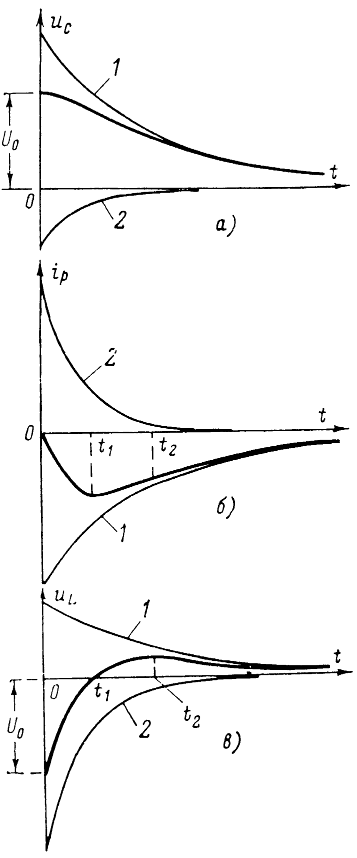


Рис. 38. Апериодический разряд конденсатора.

а — напряжение на конденсаторе; *б* — ток в контуре; *в* — напряжение на катушке индуктивности.

нию и в некоторый момент времени t_1 достигает максимума, после чего начинает убывать, не изменяя направления. По окончании переходного процесса ток становится равным нулю.

Процесс нарастания тока (в интервале $0-t_1$) определяется отрицательной, быстро затухающей экспонентой, а спад тока ($t>t_1$) — положительной, медленно затухающей экспонентой.

Аналогичным образом может быть построена кривая падения напряжения на катушке, представляющая собой также разность двух экспонент. Однако форма результирующей кривой u_L (рис. 38,*в*) получается отличной от первых двух, так как начальная ордината быстро убывающей экспоненты (кривая *2*) больше (по абсолютной величине), чем у второй медленно затухающей (кривая *1*). Начальная величина напряжения

$$u_L(0) = \frac{U_0}{2\beta}(\alpha - \beta - \alpha - \beta) = -U_0,$$

так как при $t=0$ ток $i_р$ и напряжение u_R равны нулю и напряжение на конденсаторе оказывается целиком приложенным к индуктивности. Затем напряжение u_L уменьшается (по абсолютной величине), поскольку уменьшается скорость нарастания тока, и становится равным нулю в момент t_1, когда ток максимален, после чего изменяет знак, возрастает до некоторого положительного максимума (момент t_2) и начинает уменьшаться, стремясь к нулю. Таким образом, пока ток возрастает (по абсолютной величине), э. д. с. самоиндукции катушки препятствует его нарастанию (интервал $0-t_1$), а при $t>t_1$, когда ток в цепи убывает, стремится поддержать его. Точка максимума кривой u_L и точка перегиба на кривой $i_р$ имеют место в один и тот же момент t_2.

Из графиков рис. 38 следует, что напряжения u_C и u_L, а также и ток $i_р$ изменяются по законам, резко отличающимся от гармонического. В теории цепей такие процессы называются апериодическими (т. е. непериодическими), а контур *RLC*, в котором они имеют место,— апериодическим контуром. Разряд конденсатора на активное сопротивление и катушку, при котором напряжение на конденсаторе монотонно (не меняя знака) спадает от максимальной величины до нуля, называется апериодическим.

С энергетической точки зрения апериодический разряд характеризуется следующим. В интервале от нуля до t_1 ток в контуре нарастает и поддерживается за счет энергии электрического поля конденсатора. В этом промежутке времени отдаваемая конденсатором энергия частично преобразуется в энергию магнитного поля катушки, а большая часть ее рассеивается в активном сопротивлении контура в виде тепла. В момент t_1 ток в цепи и энергия магнитного поля катушки достигают максимума. При $t>t_1$ ток уменьшается и поддерживается не только за счет оставшейся энергии электрического поля конденсатора, но и энергией, которая накопилась в магнитном поле катушки. После того, как вся энергия электрического и магнитного полей рассеится в активном сопротивлении, ток в контуре становится равным нулю.

Отметим влияние индуктивности контура на характер протекания процесса. С ростом L увеличивается коэффициент затухания α, что приводит к замедлению процессов в контуре: скорость нарастания тока (в интервале $0-t_1$) уменьшается, а продолжительность разряда конденсатора увеличивается. Наоборот, при малой индуктивности скорость нарастания тока увеличивается и разряд кон-

денсатора ускоряется. В предельном случае ($L \longrightarrow 0$) кривые тока и напряжения u_C в контуре приближаются к экспоненциальным кривым, имеющим место при разряде конденсатора в цепи RC.

б) Предельный случай апериодического процесса ($R=2\rho$).

Оставляя неизменными L и C, будем уменьшать активное сопротивление контура до тех пор, пока не установится равенство $R=2\rho$ (т. е. $\alpha=\omega_0$). При этом условии ток в контуре согласно (3-9) равен:

$$i_p = -\frac{U_0}{L} te^{-\alpha t}.$$

Напряжения на индуктивности и емкости могут быть определены тем же способом, что и в предыдущем случае:

$$u_L = -U_0 (1-\alpha t) e^{-\alpha t};$$

$$u_C = U_0 (1+\alpha t) e^{-\alpha t}.$$

Кривые изменения тока i_p и напряжений u_L и u_C, определяемые полученными равенствами, по виду аналогичны кривым, приведенным на рис. 38. Таким образом, и в этом случае имеет место апериодический разряд конденсатора. Равенство $R=R_{кр}=2\rho$ является предельным условием существования в контуре апериодического процесса. Наименьшее сопротивление контура $R=R_{кр}$, при котором еще имеет место апериодический процесс, называется **критическим сопротивлением контура**.

Ток в контуре достигает максимальной величины (по абсолютному значению) в некоторый момент времени t_1, который в случае $R=R_{кр}$ определяется простым равенством

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R_{кр}}.$$

Величина разрядного тока в момент t_1 равна:

$$i_p(t_1) = I_p = -\frac{U_0}{L}\frac{2L}{R_{кр}} e^{-1} = -0{,}736\frac{U_0}{R_{кр}}.$$

в) Колебательный процесс ($R<2\rho$).

Если сопротивление контура сделать меньше критического $R < R_{кр}$, то характер процессов в контуре существенно изменится.

Величина разрядного тока в контуре согласно формуле (3-9) при условии $\alpha<\omega_0$ определяется выражением

$$i_p = -\frac{U_0}{\omega_{св} L} e^{-\alpha t} \sin \omega_{св} t,$$

где $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1-(R/2\rho)^2}$ — частота свободных (собственных) колебаний контура.

Для напряжения на конденсаторе, способ отыскания которого остается прежний, приведем готовое выражение

$$u_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega_{св}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \psi_{св}),$$

где $\psi_{св} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{св}}{\alpha}$.

Из полученных выражений видно, что ток в контуре и напряжение на конденсаторе представляют колебания с угловой частотой $\omega_{св}$, амплитуда которых с течением времени убывает пропорционально множителю $e^{-\alpha t}$. Такие колебания называются **свободными**, или собственными затухающими колебаниями контура, ибо частота их $\omega_{св}$ и амплитуда определяются лишь параметрами R, L, C самого контура. Колебания возникают вследствие периодического обмена энергией между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки. Колебания сопровождаются потерей энергии в активном сопротивлении контура, и поэтому амплитуда их постепенно убывает. Скорость затухания колебаний зависит от коэффициента затухания $\alpha = R/2L$ и пропорциональна активному сопротивлению контура.

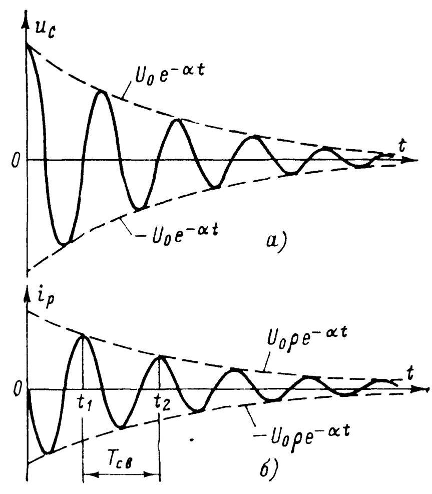


Рис. 39. Колебательный разряд конденсатора.

а — напряжение на конденсаторе; *б* — ток в контуре.

Замкнутая цепь R, L, C, в которой $R < 2\rho$, называется колебательным контуром.

Частота свободных колебаний $\omega_{св}$ всегда меньше резонансной частоты ω_0 и зависит от активного сопротивления контура. Если $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$, то при возрастании R она уменьшается и, наоборот, при уменьшении R — увеличивается и стремится к величине ω_0. Используемые на практике колебательные контуры имеют небольшие сопротивления потерь, которые во много раз меньше волнового сопротивления (R порядка единиц или десятков ом, а ρ — сотни ом), т. е. $R \ll 2\rho$. Это равносильно условию $\alpha \ll \omega_0$, и, таким образом, можно считать, что $\omega_{св} \approx \omega_0$, а $\psi_{св} \approx \pi/2$.

Выражения для i_p и u_C при этом принимают вид:

$$i_p = -U_0 \rho e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t;$$

$$u_C = U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t.$$

На рис. 39 изображены графики кривых i_p и u_C, которые можно получить следующим образом. Предварительно строим график экспоненциальной функции (например, $U_0 \rho e^{-\alpha t}$ для кривой тока), затем — график синусоиды $\sin \omega_0 t$. Результирующую кривую тока получим после перемножения ординат этих функций. Кривая тока i_p, очевидно, будет пересекать ось абсцисс в точках, где $\sin \omega_0 t = 0$. В остальных точках она оказывается меньше по абсолютному значению, чем экспоненциальная функция, и только там, где $\sin \omega_0 t = 1$, становится равной ей. Таким образом, результирующая кривая представляет собой колебание с экспоненциальной огибающей, убы-

вающей во времени, т. е. представляет собой затухающую «синусоиду».

По истечении времени, равного $t=1/\alpha$, после начала процесса (с момента $t=0$) ордината огибающей становится в $e=2{,}72$ раза меньше начального значения. По аналогии с цепями RL и RC величину $1/\alpha$ называют постоянной времени колебательного контура, которая также имеет размерность времени

$$\tau_к = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}.$$

Постоянная времени контура и его полоса пропускания $2\Delta f_0$ связаны простой зависимостью

$$\tau_к = \frac{2L}{R} = \frac{2\omega_0 L}{R\omega_0} = \frac{2\rho}{R 2\pi f_0} = \frac{Q}{\pi f_0} = \frac{1}{\pi 2\Delta f_0}. \quad (28)$$

Определим число колебаний, которые совершаются в контуре до того момента, пока их амплитуда не уменьшится до 0,05 начального значения и процесс можно считать закончившимся. Как следует из свойств экспоненциально убывающей функции, которая определяет закон изменения огибающей колебаний, последние практически затухают через время, равное $3\tau_к$. Число колебаний за это время

$$N = 3\tau_к f_0 = 3\frac{Q}{\pi f_0} f_0 \approx Q, \quad (29)$$

т. е. количество колебаний численно равно добротности контура. Так, если добротность $Q=50$, то при разряде конденсатора в контуре происходит примерно 50 колебаний.

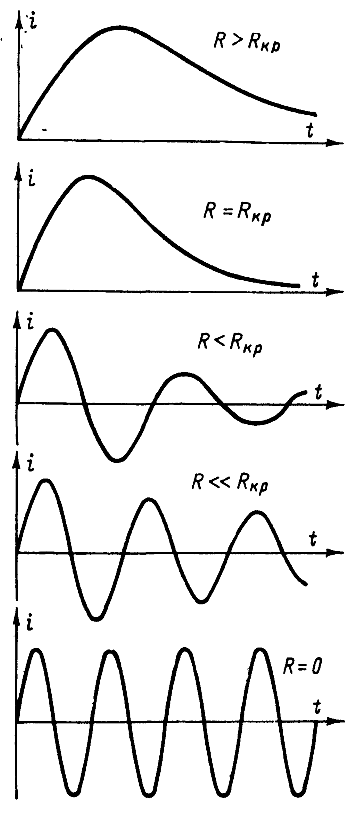


Рис. 40. Графики изменения тока в контуре при уменьшении активного сопротивления контура.

Скорость затухания колебательного процесса принято характеризовать так называемым логарифмическим декрементом колебаний δ, равным натуральному логарифму отношения двух последующих амплитуд одного знака. Например, из графика рис. 39,*б* для тока согласно этому определению имеем:

$$\delta = \ln\left[(U_0\rho e^{-\alpha t_1}) : (U_0\rho e^{-\alpha (t_1+T_{св})})\right] = \ln e^{\alpha T_{св}} = \alpha T_{св},$$

где $T_{св} = 2\pi/\omega_{св}$ — период свободных колебаний в контуре.

При небольшом затухании $T_{св} \approx T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$$\delta = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi\frac{R}{\rho} = \frac{\pi}{Q}.$$

В контуре со средней добротностью ($Q=100$) логарифмический декремент колебаний $\delta \approx 0{,}03$.

Если $R=0$ (идеальный контур), т. е. потери в контуре отсутствуют, то первоначальный запас энергии остается неизменным и при разряде конденсатора возникают незатухающие гармонические колебания ($e^{-\alpha t} = 1$), при которых энергия попеременно переходит из электрического в магнитное поле и наоборот.

Итак, характер переходных процессов в контуре при разряде конденсатора существенно зависит от его активного сопротивления. При больших величинах R процессы в контуре имеют апериодический характер, по мере уменьшения R такой характер процессов сохраняется до тех пор, пока остается $R \geqslant R_{кр}$, при дальнейшем уменьшении $R < R_{кр}$ в контуре возникают колебания. Изменение характера тока в контуре при уменьшении его активного сопротивления наглядно проиллюстрировано на рис. 40.

Включение в цепь RLC постоянной э. д. с.

Обратимся к цепи, изображенной на рис. 41, к которой в момент замыкания выключателя подключается источник постоянной э. д. с., т. е. на цепь воздействует э. д. с. включения (рис. 8,*б*). Начальное напряжение на конденсаторе равно нулю. Из физических соображений очевидно, что в установившемся режиме ток в цепи обращается в нуль $i_з(\infty)=0$, а конденсатор заряжается до напряжения $u_C(\infty) = E$. Характер переходных процессов здесь также зависит от величины активного сопротивления контура: при $R \geqslant R_{кр}$ в контуре возникает апериодический процесс, который часто называют апериодическим зарядом конденсатора, а при $R < R_{кр}$ — колебательный (колебательный заряд конденсатора). Закон изменения тока во всех случаях будет такой же, как и при разряде конденсатора (см. предыдущий параграф), то направление тока в цепи будет иное, так как теперь происходит процесс заряда конденсатора.

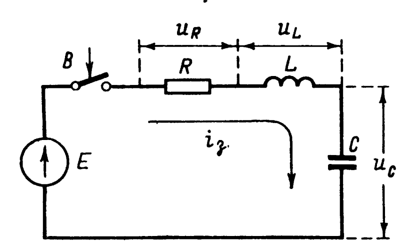


Рис. 41. Схема включения в цепь RLC источника постоянной э. д. с.

Для случая $R > 2\rho$ напряжение на конденсаторе может быть представлено выражением

$$u_C = E - \frac{E}{2\beta}\left[(\alpha+\beta)\, e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha-\beta)\, e^{-(\alpha+\beta)t}\right].$$

Напряжение изменяется от нуля при $t=0$ до величины E (при $t \longrightarrow \infty$), причем само изменение u_C происходит по тому же закону, что и при разряде конденсатора.

При $R<2\rho$ происходит колебательный заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе в случае малых потерь ($\omega_{св} \approx \omega_0$) равно:

$$u_C \approx E - Ee^{-\alpha t} \cos \omega_0 t.$$

Графики изменения тока и напряжения u_C при колебательном заряде конденсатора изображены на рис. 42. Рассмотрение кривой u_C позволяет лучше уяснить физику процесса колебательного заряда. В момент t_1, т. е. через четверть периода собственных колебаний, когда напряжение u_C достигает величины E, ток максимален и имеет положительное направление. Энергия, запасенная в магнитном поле катушки, в этот момент максимальна. За счет этой энергии ток и дальше в течение некоторого времени будет протекать в прежнем направлении и заряжать конденсатор до напряжения, большего E. По истечении половины периода собственных колебаний с начала процесса, т. е. в момент t_2, ток и энергия магнитного поля становятся равными нулю. Напряжение на конденсаторе и энергия электрического поля в этот момент максимальны. После этого, поскольку $u_{C\,макс}>E$, начинается разряд конденсатора, ток меняет направление и процессы в контуре повторяются. Вследствие необратимых потерь колебательный процесс с течением времени затухает и в конце концов ток становится равным нулю, а напряжение на конденсаторе — величине E. Наибольшее напряжение, до которого заряжается конденсатор, получается в момент $t_2=\pi/\omega_0$, т. е.

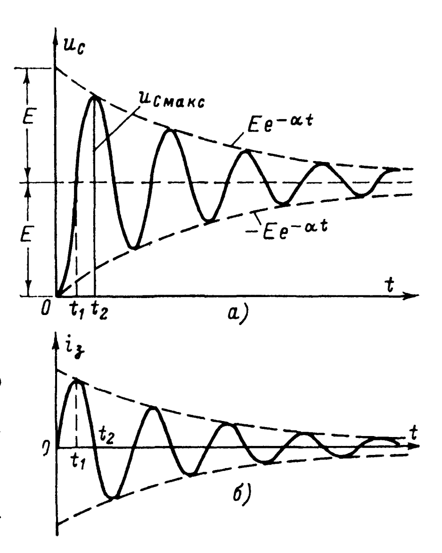


Рис. 42. Колебательный заряд конденсатора.

а — напряжение на конденсаторе; *б* — ток в контуре.

$$u_{C\text{макс}} = E\left(1 + e^{-\frac{\alpha}{\omega_0}\pi}\right).$$

Если потери в контуре малы, то $\alpha/\omega_0 \ll 1$, а $e^{-\frac{\alpha}{\omega_0}\pi} \approx 1$; откуда следует, что $u_{C\text{макс}} \approx 2E$, т. е. напряжение на конденсаторе может почти вдвое превысить величину э. д. с. источника питания.

Включение в цепь RLC гармонической (синусоидальной) э. д. с.

Пусть в контур RLC (рис. 43) в момент $t=0$ включается источник переменной э. д. с., определяемый выражением (23). Отыскание решения уравнения для тока в этом случае представляет собой трудоемкую операцию, и для ее выполнения требуется специальная математическая подготовка читателя, а выражения для тока и напряжений в контуре в переходном режиме получаются довольно громоздкими. Поэтому рассмотрим ряд частных случаев, обычно встречающихся на практике, для которых приведем готовые выражения для тока в контуре и напряжения u_C. В зависимости от величины активного сопротивления процессы в контуре могут иметь апериодический или колебательный характер. В последнем случае резонансная частота ω_0 контура может быть больше, меньше, равной (или достаточно близкой) частоте ω внешнего источника. С точки зрения радиотехнических приложений наибольший практический интерес представляют процессы в колебательных контурах, имеющих малые потери. В настоящем параграфе рассматриваются только такие цепи.

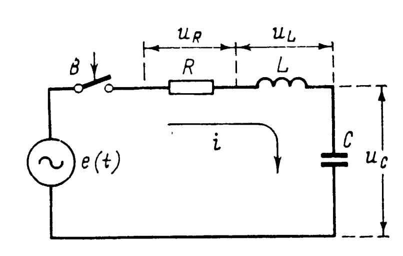


Рис. 43. Схема включения в цепь RLC источника переменной э. д. с.

Если активное сопротивление контура мало $R \ll 2\rho$, то частота свободных колебаний и резонансная частота контура отличаются практически незначительно, т. е. $\omega_{св} \approx \omega_0$, а $\alpha/\omega_{св} \approx 0$. Напряжение u_C на конденсаторе и ток i в контуре для такого случая могут быть представлены выражениями

$$u_C \approx -U_{Cm}\cos(\omega t+\psi-\varphi)+U_{Cm}e^{-\alpha t}\left[\cos(\psi-\varphi)\cos\omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\psi-\varphi)\sin\omega_0 t\right]; \quad (30)$$

$$i \approx \frac{U_m}{z}\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\frac{U_m}{z}e^{-\alpha t}\left[\sin(\psi-\varphi)\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0}{\omega}\cos(\psi-\varphi)\sin\omega_0 t\right], \quad (31)$$

где

U_m — амплитуда напряжения внешнего источника;

$z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$ — модуль полного сопротивления цепи;

$\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega L-1/\omega C}{R}$ — фазовый сдвиг между током и приложенной к контуру внешней э. д. с.,

$U_{Cm}=\dfrac{U_m}{z\omega C}$ — амплитуда напряжения на конденсаторе в установившемся режиме.

Первые слагаемые в выражениях для u_C и i дают нам вынужденные составляющие, которые при гармоническом внешнем воздействии совпадают с установившимися значениями, вторые — свободные составляющие, затухающие с течением времени и имеющие частоту колебаний ω_0. Последние в свою очередь состоят из двух слагаемых (выражения в квадратных скобках), анализируя которые можно прийти к выводу, что характер переходных процессов в контуре существенно зависит от соотношения между частотой колебаний внешнего источника и резонансной частотой контура. Рассмотрим процессы в контуре при различных соотношених между частотами ω и ω_0.

а) Частота колебаний источника значительно отличается от резонансной частоты контура.

Вначале рассмотрим случай, когда $\omega \gg \omega_0$, а начальную фазу примем равной нулю ($\psi=0$). При таком условии $\varphi \approx \pi/2$, $z \approx \omega L$ и выражения для u_C и i принимают вид:

$$u_C \approx -U_{Cm} \sin \omega t + U_{Cm} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

а

$$i \approx -I'_m \cos \omega t + I'_m e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t,$$

где $I'_m \approx \frac{U_m}{\omega L}$ — амплитуда тока в контуре в установившемся режиме.

Из полученных выражений видно, что в начальный период переходного процесса ($\alpha t \ll 1$) амплитуда тока в цепи в отдельные моменты времени (когда оба слагаемых принимают одинаковый знак) может не более чем в 2 раза превысить амплитуду тока установившегося режима. Что касается амплитуды напряжения на конденсаторе, то если включение цепи происходит в момент, когда $\psi \approx 0$, в переходном режиме она оказывается почти в ω/ω_0 раз больше амплитуды напряжения установившегося режима, т. е. при включении в контуре может возникнуть напряжение значительной величины.

Рассмотрим второй случай $\omega \ll \omega_0$, тогда $\varphi \approx -\pi/2$ и $z \approx 1/\omega C$, кроме того, примем $\psi = \pi/2$. После подстановки этих значений в выражения (30) и (31) получим:

$$u_C \approx U_{Cm} \cos \omega t - U_{Cm} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$$

и

$$i \approx -I''_m \sin \omega t + I''_m \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

где $I''_m = U_m \omega C$ — амплитуда тока в контуре в установившемся режиме.

В этом случае, если включение происходит в момент, когда $\psi = \pi/2$, в начальный период переходного процесса амплитуда тока в контуре может в ω_0/ω раз превысить амплитуду тока установившегося режима. Напряжение на конденсаторе в это же время может возрасти не более чем в 2 раза по сравнению с установившимся значением.

б) Частоты ω и ω_0 совпадают (явление резонанса).

При резонансе $\omega=\omega_0$, $z=R$, а $\varphi=0$, тогда согласно формуле (31) можно записать выражение для тока в контуре

$$i = I_{0m}\sin(\omega_0 t + \psi) - I_{0m}e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t + \psi) =$$
$$= I_{0m}(1 - e^{-\alpha t})\sin(\omega_0 t + \psi), \quad (32)$$

где $I_{0m}=U_m/R$ — амплитуда тока в контуре при резонансе.

Вынужденная составляющая тока представляет собой синусоиду, свободная — колебания той же частоты, амплитуда которых с течением времени убывает. Фазы их противоположны, поэтому в сумме они дают колебания, амплитуда которых плавно возрастает от нуля до установившегося значения I_{0m}.

Изменение амплитуды колебаний определяется множителем $1-e^{-\alpha t}$, который графически представляет собой экспоненциальную кривую. В этом случае в контуре сверхтоки не возникают. Кривая установления тока изображена на рис. 44, где принято $\psi=0$.

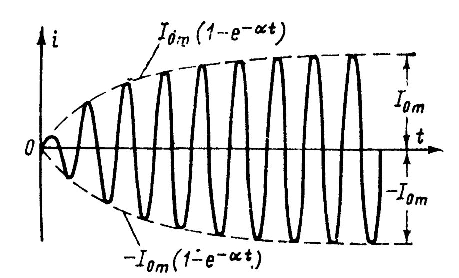


Рис. 44. Кривая изменения тока в контуре при включении источника переменной э. д. с. ($\omega=\omega_0$).

Продолжительность установления колебаний определяется постоянной времени экспоненты, т. е. постоянной времени контура $\tau_к=1/\alpha$, и практически равна $3\tau_к$. Согласно формуле (28) величина постоянной времени контура равна:

$$\tau_к = \frac{Q}{\pi f_0} = \frac{1}{\pi 2\Delta f_0}.$$

Таким образом, время установления стационарной амплитуды колебаний зависит от полосы пропускания (добротности) контура. В контуре с широкой полосой пропускания $2\Delta f_0$ (с небольшой добротностью) величина $\tau_к$ меньше и стационарный режим устанавливается быстрее. Наоборот, в узкополосном колебательном контуре (контур с большой добротностью) переходные процессы продолжаются более длительное время. Например, в контуре с резонансной частотой $f_0=600$ кГц и добротностью $Q=200$ переходный процесс длится примерно

$$3\tau_к = 3\,\frac{200}{3{,}14\cdot 600\cdot 10^3} \approx 320 \text{ мкс}.$$

Напряжение на конденсаторе при $\omega=\omega_0$, как следует из выражения (30), изменяется по тому же закону, что и ток:

$$u_C = -U_m\frac{\rho}{R}\cos(\omega_0 t + \psi) + U_m\frac{\rho}{R}e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t + \psi) =$$
$$= -U_m\frac{\rho}{R}(1 - e^{-\alpha t})\cos(\omega_0 t + \psi). \quad (33)$$

Напряжение на конденсаторе плавно возрастает и в течение всего переходного процесса не превышает амплитуды установившихся колебаний.

Как и следовало ожидать, вследствие резонанса амплитуда установившегося напряжения на конденсаторе U_{0Cm} в Q раз превышает амплитуду напряжения источника

$$U_{0Cm} = U_m \frac{\rho}{R} = QU_m.$$

Кривая u_C аналогична графику рис. 44.

в) Частоты ω и ω_0 незначительно отличаются друг от друга.

В этом случае частоты колебаний вынужденного и свободного токов будут различны. С течением времени фазовый сдвиг между этими колебаниями непрерывно изменяется и по прошествии некоторого времени эти токи будут не вычитаться (как это было при резонансе), а арифметически складываться. При этом в переходном режиме возникают биения и ток в контуре может достигнуть вдвое больших значений, чем при установившемся режиме. Характер изменения кривой тока в контуре для этого случая показан на рис. 45. Аналогичный вид имеет и кривая u_C.

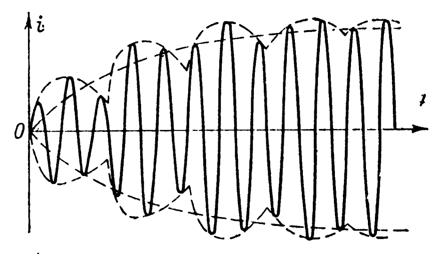


Рис. 45. Характер изменения тока в контуре при включении источника переменной э. д. с., частота которого незначительно отличается от резонансной частоты контура.

Ударное возбуждение колебательного контура

В ряде импульсных устройств используются свободные (собственные) колебания, возникающие в параллельном колебательном контуре в момент включения (или выключения) источника постоянного напряжения, т. е. колебания переходного режима. Такой способ получения колебаний называется **ударным возбуждением контура**. Хорошая стабильность частоты свободных колебаний позволяет использовать контуры ударного возбуждения для формирования импульсов напряжения (служащих калибрационными отметками времени), для получения импульсов со стабильной длительностью и периодом повторения и т. п. При этом период повторения, а следовательно, и длительность импульсов можно просто регулировать, изменяя частоту свободных колебаний контура, например, с помощью конденсатора переменной емкости.

Обратимся к анализу процессов в цепи, изображенной на рис. 46,*а*. Резистор R_1 предназначен для ограничения тока в цепи, а активное сопротивление катушки учтено элементом $r_к$, причем обычно $R_1 \gg r_к$. При замкнутом ключе в установившемся режиме через катушку протекает ток $i_L(0) = I_0 \approx E/R_1$, а конденсатор контура заряжается до напряжения $u_C(0) \approx Er_к/R_1 \ll E$.

Найдем напряжение на контуре, возникающее при размыкании ключа, полагая, что процессы в контуре практически определяются запасом энергии, накопленной в магнитном поле катушки, посколь-

ку начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ невелико. На рис. 46,*а* соответствующими знаками показаны положительное направление тока i в контуре, которое совпадает с направлением начального тока в катушке, а также полярность напряжений на его элементах в первый момент после размыкания ключа.

Напряжение на контуре (т. е. на конденсаторе C) проще всего найти, воспользовавшись операторным методом. Для контура RLC

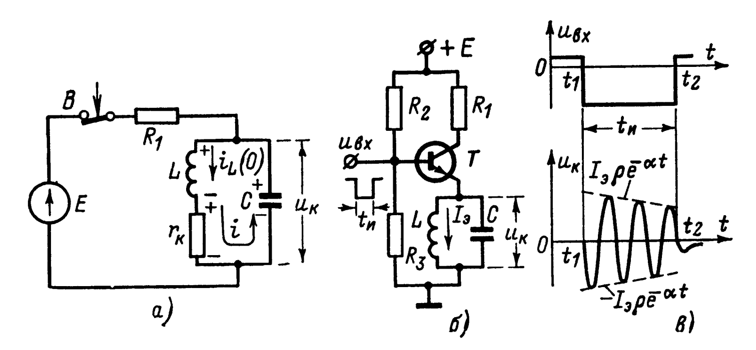


Рис. 46. Контур ударного возбуждения.

а — основная схема включения контура; *б* — включение контура в эмиттерную цепь транзистора; *в* — форма входного и выходного напряжения.

по второму закону Кирхгофа согласно обозначенным на схеме полярностям напряжений запишем операторное уравнение

$$U_L(p)+U_R(p)-U_C(p)=0.$$

Подставив в уравнение соответствующие значения из формулы (9) и табл. 4 и принимая $u_C(0)=0$, получим:

$$pLI(p)-pLI_0+r_\text{к}I(p)-U_C(p)=0,$$

где $I(p)$ — изображение тока в контуре.

С помощью соотношения $I(p)=-pCU_C(p)$ (знак минус учитывает принятые на схеме направления тока i и полярность напряжения u_C) можно выразить все члены последнего уравнения через напряжение $U_C(p)$. Решив полученное уравнение относительно $U_C(p)$, найдем изображение напряжения

$$U_C(p)=-\frac{I_0}{C}\,\frac{p}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2},$$

где, как обычно, обозначено $\alpha=r_\text{к}/2L$ и $\omega_0=1/\sqrt{LC}$.

Контуры ударного возбуждения имеют незначительные потери $r_\text{к}\ll 2\rho$, поэтому, воспользовавшись формулой (3-9) для случая $\alpha<\omega_0$ и принимая $\omega_\text{св}\approx\omega_0$, искомое напряжение представим в следующем виде:

$$u_\text{к}=u_C=-I_0\rho e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t.$$

Амплитуда колебаний пропорциональна волновому сопротивлению контура и начальному току в катушке, частота колебаний опре-

деляется только параметрами контура L и C. С течением времени колебания затухают по экспоненциальному закону. Как всегда, скорость убывания амплитуды колебаний определяется постоянной времени $\tau_к = 1/\alpha = Q/\pi f_0$. Следовательно, чем выше добротность контура (больше $\tau_к$), тем слабее затухают колебания, тем большее число колебаний можно получить без существенного снижения их амплитуды. Общее число колебаний, которое совершается в контуре до их полного затухания, определяется формулой (29).

В реальных условиях роль ключа выполняет электронная лампа или транзистор. Контур ударного возбуждения обычно включается в катодную цепь лампы или эмиттерную цепь транзистора и возбуждается при размыкании электронного ключа. Пример подобной схемы на транзисторе приведен на рис. 46,*б*, где R_1 — резистор, ограничивающий величину начального тока I_0; R_2; R_3 — резисторы делителя, обеспечивающего необходимое смещение в базовой цепи транзистора. В интервале между импульсами транзистор открыт; через катушку контура протекает эмиттерный ток $I_э = I_0$. Транзистор периодически запирается импульсами, подаваемыми в цепь базы. В момент запирания происходит ударное возбуждение контура и в нем возникают серии слабо затухающих (почти гармонических) колебаний. Продолжительность каждой серии при небольшом активном сопротивлении контура определяется длительностью запирающего импульса $t_и$ (рис. 46,*в*). Степень уменьшения амплитуды колебаний в течение импульса зависит от соотношения между $\tau_к$ и $t_и$. Например, если $t_и = 0{,}5\tau_к$, то амплитуда колебаний к концу импульса уменьшается на 40% (так как $e^{-0{,}5} = 0{,}6$). При этом число колебаний, которое может дать контур ударного возбуждения, равно:

$$N = t_и f_0 = \frac{\tau_к}{2} f_0 = \frac{Q}{2\pi} \approx \frac{Q}{6}.$$

После окончания импульса транзистор отпирается, контур шунтируется малым выходным сопротивлением транзистора и колебания быстро прекращаются.

Воздействие радиоимпульса на колебательный контур

Рассмотрим прохождение радиоимпульса прямоугольной формы через последовательный колебательный контур. Математически радиоимпульс длительностью $t_и$ (рис. 47,*а*) может быть определен так:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_и \sin \omega t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_и; \\ 0 & \text{при } t \geqslant t_и. \end{cases}$$

Между длительностью радиоимпульса и периодом высокочастотных колебаний, как правило, выполняется соотношение $t_и \geqslant 10/f_0$. Это означает, что в радиоимпульсе обычно содержится как минимум 10 высокочастотных колебаний.

Радиоимпульсы прямоугольной формы широко используются в импульсной радиосвязи, радиотелеуправлении, радионавигации и других областях радиотехники. Искажение их формы, которое свя-

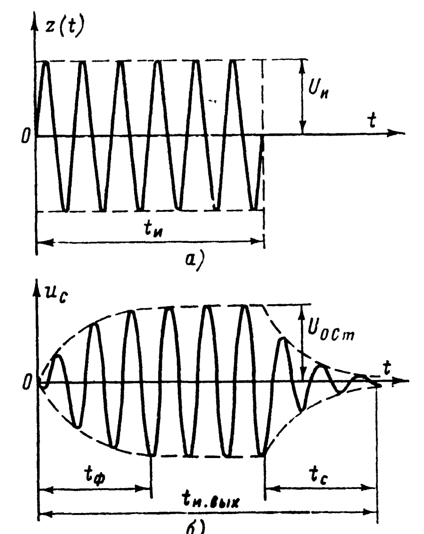


Рис. 47. Форма входного (*а*) и выходного (*б*) радиоимпульсов при прохождении его через последовательный колебательный контур.

зано с переходными процессами в колебательных контурах, возникающими в результате воздействия на них радиосигналов, влияет на правильность воспроизведения передаваемой информации и точность работы радиоаппаратуры.

Обычно колебательный контур настроен на частоту воздействующего радиосигнала, т. е. $\omega_0=\omega$, а выходное напряжение (в случае последовательного контура) снимается с конденсатора или катушки. Процессы в контуре можно анализировать для двух промежутков времени $0\leqslant t\leqslant t_и$ и $t\geqslant t_и$.

В интервале $0\leqslant t\leqslant t_и$ в контуре происходят процессы, аналогичные тем, которые имеют место при воздействии на него гармонической э. д. с. Ток в контуре и напряжение на конденсаторе определяются выражениями (32) и (33) соответственно. Огибающая колебаний представляет собой экспоненту $1-e^{-t/\tau_к}$ с постоянной времени $\tau_к$. Время, соответствующее нарастанию амплитуды колебаний в контуре до 0,95 стационарного значения, называется фронтом радиоимпульса и равно $t_ф=3\tau_к$. Из выражения (28) следует, что

$$t_ф=3\tau_к\approx\frac{Q}{f_0}=\frac{1}{2\Delta f_0}. \qquad (34)$$

Когда длительность воздействующего радиоимпульса достаточно велика $t_и>3\tau_к$, то в контуре по истечении времени, примерно равного $3\tau_к$, устанавливаются стационарные колебания с частотой ω_0 (рис. 47,*б*).

После прекращения внешнего воздействия ($t\geqslant t_и$) колебания в контуре продолжаются, поскольку в электромагнитном поле, связанном с контуром, имеется запас энергии. Однако амплитуда колебаний будет уменьшаться, так как поступления энергии в контур извне нет, а первоначальные запасы энергии непрерывно уменьшаются вследствие необратимых потерь в активном сопротивлении контура. Математически можно показать, что при $t\geqslant t_и$ в контуре возникают свободные колебания с частотой $\omega_{св}\approx\omega_0$ и с амплитудой, убывающей по закону $e^{-\frac{t}{\tau_к}}$ с постоянной времени $\tau_к$.

Длительностью процесса затухания колебаний обычно считают время, в течение которого амплитуда колебаний в контуре спадает

до 0,05 первоначального значения. Это время называется срезом радиоимпульса и согласно свойствам экспоненциальной функции равно трем постоянным времени, т. е. $t_с = 3\tau_к$. Таким образом, длительности фронта и среза радиоимпульса на выходе колебательного контура получаются одинаковыми, а длительность самого импульса $t_{и\ вых}$ большей, чем у входного (рис. 47,*б*).

Как следует из соотношения (34), длительность $t_ф$ (а следовательно, и $t_с$) зависит от добротности контура. При малой добротности контура переходные процессы кратковременны, длительности $t_ф$ и $t_с$ относительно малы и импульс претерпевает небольшие искажения. Но при этом оказывается малой и амплитуда установившихся колебаний в контуре, если напряжение снимается с катушки или конденсатора $U_{0Lm} = U_{0Cm} = QU_и$.

Увеличение добротности контура сопровождается возрастанием амплитуды установившихся колебаний. Однако вместе с тем растут длительности фронта $t_ф$ и среза $t_с$, т. е. увеличиваются искажения формы радиоимпульса.

Если принять условие $t_ф = t_и$, то для полосы пропускания контура получится следующее выражение:

$$2\Delta f_0 = 1/t_и.$$

Для получения на выходе контура импульсов с малыми искажениями полоса пропускания иногда выбирается в несколько раз больше

$$2\Delta f_0 = \frac{2 \div 3}{t_и}.$$

Таким образом, чем меньше длительность радиоимпульса, тем большую полосу пропускания должен иметь контур для прохождения через него этого импульса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ицхоки Я. С.** Импульсные устройства. М., «Советское радио», 1959.
2. **Атабеков Г. И.** Теория линейных электрических цепей. М., «Энергия», 1969.
3. **Нейман Л. Р., Демирчян К. С.** Теоретические основы электротехники, ч. II. М., «Энергия», 1966.
4. **Гинзбург С. Г.** Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. М., «Высшая школа», 1967.
5. **Хесин А. Я.** Импульсная техника. М., «Энергия», 1971.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 26 коп.